$\boxed{\text{Chapitre 10 : Exemples d'exercices corrigés}}$

Enoncé, Exercice 10.1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) = x^n$

a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction que f l'on précisera.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$, mais que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$, ni sur $[0,1[$.

Correction

a) Il est directe de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ si $x \in [0,1[$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$

On a donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } \begin{array}{rccl} f & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array}}$

b) • Soit $x \in]0,1[$. Alors : $\forall x \in [0,a]$, $0 \leq x^n \leq a^n$ donc $0 \leq f_n(x) \leq f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Comme la majoration ne dépend pas de n on a bien $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,a]}$

• Comme les f_n sont continues sur $[0,1]$, si la convergence était uniforme sur $[0,1]$ on aurait, par théorème de continuité du cours, que f serait continue sur $[0,1]$, ce qui n'est pas le cas.
Donc $\boxed{\text{La convergence de } (f_n) \text{ vers } f \text{ n'est pas uniforme sur } [0,1]}$

• $f_n(1-\frac{1}{n}) = (1-\frac{1}{n})^n = exp(nln(1-\frac{1}{n})) = exp(n(\frac{-1}{n} + o(\frac{1}{n})) = exp(-1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} exp(-1)$

On a donc $f_n(1-\frac{1}{n}) = f_n(1-\frac{1}{n}) - f(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} exp(-1)$
On n'a donc pas $||f_n - f||_{[0,1],\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{\text{la convergence de } (f_n) \text{ vers } f \text{ n'est pas uniforme sur } [0,1[.}$

Enoncé, Exercice 10.2

On pose $\forall n \geq 2$, $\begin{array}{rcccl} f_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (1-\frac{t}{n})^n \end{array}$

a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
b) Etudier, sur $[0,1]$, les variations de la fonction g_n définie par $g_n(t) = 1 - e^t f_n(t)$
c) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 (1-\frac{t}{n})^n dt$

Correction

a) $f_n(t) = (1-\frac{t}{n)})^n = exp(nln(1-\frac{t}{n})) = exp(n(-\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n}))) = exp(-t+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}$

$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ converge donc simplement vers } \begin{array}{rcccl} f & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^{-t} \end{array} \text{ sur } [0,1]}$

b) g_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$
$g_n'(t) = -e^t(1-\frac{t}{n})^n - e^t n(\frac{-1}{n})(1-\frac{t}{n})^{n-1} = e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}[-(1-\frac{t}{n})+1] = e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}\frac{t}{n} \geq 0$

On en déduit que $\boxed{g_n \text{ est croissante sur } [0,1].}$

c) Avec le b) on déduit : $\forall t \in [0,1]$ $g_n(0) \leq g_n(t) \leq g_n(1)$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1]$ $0 \leq 1 - e^t f_n(t) \leq 1 - e(1-\frac{1}{n})^n$ on multiplie par $e^{-t} > 0$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1]$ $0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq e^{-t}(1-e(1-\frac{1}{n})^n)$ on a $e^{-t} \leq 1$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1]$ $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq 1 - e(1-\frac{1}{n})^n$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1]$ $||f_- f_n||_{[0,1],\infty} \leq 1 - e(1-\frac{1}{n})^n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e(1-\frac{1}{n})^n = 0$ on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_- f_n||_{[0,1],\infty} = 0$ et donc
$\boxed{f_n \text{ converge uniforme vers } f \text{ sur } [0,1]}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 (1-\frac{t}{n})^n dt$
$= \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)dt$ comme les f_n sont continues et que la convergence est uniforme sur le segment $[0,1]$
$= \int\limits_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)dt$
$= \int\limits_0^1 f(t)dt$
$= \int\limits_0^1 e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 (1-\frac{t}{n})^n dt = \frac{e-1}{e}}$

Enoncé, Exercice 10.3

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}$

a) Etudier la convergence simple de (f_n).

b) Soit $a > 0$. Montrer que la convergence de (f_n) est uniforme sur $[a, +\infty[$.

c) Montrer que la convergence de (f_n) n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$

Correction

a) • $f_n(x)$ n'est pas défini pour $x = 0$

• Pour $x < 0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{1-e^{-x^2}} ne^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par comparaison exp-puissance.

• Pour $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{1-e^{-x^2}} ne^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exp-puissance.

On a donc $\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers la fonction nulle sur }]0, +\infty[}$

b) Etudions $A : x \mapsto x^2e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$
A est dérivable et $A'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2e^{-nx} = xe^{-nx}(2 - nx)$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	-	
$A(x)$	0	$\nearrow$	$A(\frac{2}{n})$	$\searrow$	0

avec $A(\frac{2}{n}) = \frac{4}{n^2}exp(-2)$

D'après les variations de A, on a : $\forall x \geq 0$, $0 \leq A(x) \leq \frac{4}{e^2n^2}$

Donc sur $[a, +\infty[$: $0 \leq f_n(x) = \frac{n}{1-e^{-x^2}} A(x) \leq \frac{n}{1-e^{-x^2}} A(\frac{2}{n}) = \frac{4}{(1-e^{-x^2})(e^2n)}$
Comme $x \mapsto \frac{1}{1-e^{-x^2}}$ est décroissante sur $[a, +\infty[$ alors $\forall x \geq a$, $\frac{1}{1-e^{-x^2}} \leq \frac{1}{1-e^{-a^2}}$

En regroupant les résultats ci-dessus on a , $\forall x \geq a$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1-e^{-a^2}} n \frac{4}{e^2n^2} = \frac{1}{1-e^{-a^2}} \frac{4}{e^2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc : $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [a, +\infty[}$

c) Pour $n \geq 1$: $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1-exp(-\frac{1}{n^2})} ne^{-1} = \frac{1}{ne} \frac{1}{1-(1-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = \frac{1}{ne} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{e} \frac{1}{\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$f_n(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\boxed{\text{la convergence de } (f_n) \text{ vers la fonction nulle n'est pas uniforme sur }]0, +\infty[}$
