Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°5

EXERCICE 1

1) • On pose : $\begin{array}{rccl} \varphi & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{sh(t)-ln(1+t)}{e^t t^{5/2}} \end{array}$

φ est continue sur $]0,+\infty[$ donc I pose problème en 0 et en $+\infty$

• Au voisinage de $t=0$: $\varphi(t) = e^{-t}\frac{t+o(t^2)-(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^{5/2}} = e^{-t}\frac{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^{5/2}} \sim 1 \times \frac{\frac{t^2}{2}}{t^{5/2}} \sim \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Comme, d'après Riemann : $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ alors, par équivalent : φ est intégrable sur $]0,1]$

• Au voisinage de $+\infty$

Comme $sh(t) \sim \frac{e^t}{2}$ alors : $\varphi(t) \sim \frac{\frac{e^t}{2}}{e^t t^{5/2}} \sim \frac{1}{2t^{5/2}}$

Comme, d'après Riemann : $t \mapsto \frac{1}{t^{5/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors, par équivalent : φ est intégrable sur $[1,+\infty[$

• φ est intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$ et donc $\boxed{I \text{ est convergente.}}$

2) On va distinguer plusieurs cas :

Cas 1 : $\alpha > 1$

Alors $\frac{1}{n+n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha} > 0$

Comme $\alpha > 1$ alors, par Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente et par équivalent $\sum \frac{1}{n+n^\alpha}$ est convergente.

Cas 2 : $\alpha < 1$

Alors $\frac{1}{n+n^\alpha} \sim \frac{1}{n} > 0$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente et par équivalent $\sum \frac{1}{n+n^\alpha}$ est divergente.

Cas 3 : $\alpha = 1$

Alors $\frac{1}{n+n^\alpha} = \frac{1}{2n}$ qui est le terme d'une série de Riemann divergente donc $\sum \frac{1}{n+n^\alpha}$ est divergente.

Bilan : $\boxed{\sum \frac{1}{n+n^\alpha} \text{ est convergente} \Leftrightarrow \alpha > 1}$

EXERCICE 2

1) • N est un sup sur un nombre finis de valeurs (n^2), donc le sup est un max, donc N est bien définie et est même clairement à valeurs positives.

• Soit $A = (a_{i,j}) \in E$, $B = (b_{i,j}) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$N(\lambda A) = n \sup\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |\lambda a_{i,j}| = n \sup\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |\lambda|\,|a_{i,j}| = |\lambda|\, n \sup\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| = |\lambda|\, N(A)$

• $N(A) = 0$

$\Rightarrow n \sup\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| = 0$

$\Rightarrow \sup\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| = 0$

$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ |a_{i,j}| \leq 0$

$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ |a_{i,j}| = 0$

$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ a_{i,j} = 0$

$\Rightarrow A = 0_E$

• Par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$: $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$

Par définition de $N(A)$ et de $N(B)$: $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \frac{N(A)}{n} + \frac{N(B)}{n}$

En passant au sup : $\sup\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \frac{N(A)}{n} + \frac{N(B)}{n}$

Et en multipliant par n : $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$

• On a donc : $\forall (A,B) \in E^2 \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \begin{cases} N(A) \geq 0 \\ N(\lambda A) = |\lambda|\, N(A) \\ N(A) = 0 \Rightarrow A = 0_E \\ N(A+B) \leq N(A) + N(B) \end{cases}$ donc $\boxed{N \text{ est une norme sur } E}$

2) Soit $A = (a_{i,j}) \in E$, $B = (b_{i,j}) \in E$. On pose $C = AB = (c_{i,j})$

Alors $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$

En utilisant la définition de $N(A)$ et de $N(B)$ et l'ingalité triangulaire.

$|c_{i,j}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{N(A)}{n}\frac{N(B)}{n} = n\frac{N(A)N(B)}{n^2} = \frac{N(A)N(B)}{n}$

Donc $n\,|c_{i,j}| \leq N(A)N(B)$. En passant au sup on a : $N(C) \leq N(A)N(B)$

Donc $\boxed{\forall (A,B) \in E^2 \ , \ N(AB) \leq N(A)N(B)}$

EXERCICE 3 : e3A PC 2020 exercice 5

1°) Soit $(P,Q,R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

i) $< P, Q + \lambda R >$

$= P(1)(Q(1) + \lambda R(1)) + P'(1)(Q'(1) + \lambda R'(1)) + P''(1)(Q''(1) + \lambda R''(1))$

$= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1) + \lambda[P(1)R(1) + P'(1)R'(1) + P''(1)R''(1)]$

$=< P, Q > + \lambda < P, R >$

ii) $< P, Q >=< Q, P >$ de manière directe.

iii) $< P, P >= P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 \geq 0$

iv) Si on écrit $P = a + b(X-1) + c(X-1)^2$ (dans la base $(1, X-1, (X-1)^2)$ alors : $P'(X) = b + 2c(X-1)$ et $P''(X) = 2c$ donc $P(1) = a$, $P'(1) = b$, $P''(1) = 2c$:

$< P,P >= 0 \Rightarrow a^2+b^2+(2c)^2 = 0 \Rightarrow a = b = 2c = 0 \Rightarrow P = 0_E$ (somme de termes positifs nulle)

On a donc : $\forall (P,Q,R) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} i) < P,Q+\lambda R >=< P,Q > +\lambda < P,R > \\ ii) < P,Q >=< Q,P > \\ iii) < P,P >\geq 0 \\ iv) < P,P >= 0 \Rightarrow P = 0_E \end{cases}$

Donc $\boxed{<,> \text{ définit bien un produit scalaire sur } E.}$

2°) La base du 1°) (au point iii)) semble indiquée. On pose : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X-1$ et $Q_2 = (X-1)^2$
Alors : $Q_0' = 0$, $Q_1' = 1$, $Q_2' = 2(X-1)$, $Q_0'' = 0$, $Q_1'' = 0$ et $Q_2'' = 2$

On a donc : $< Q_0,Q_1 >= 1.0+0.0+0.0 = 0$
$< Q_0,Q_2 >= 1.0+0.0+0.0 = 0$, $< Q_0,Q_2 >= 1.0+0.0+0.0 = 0$, $< Q_1,Q_2 >= 0.0+1.0+0.0 = 0$
La base (Q_0,Q_1,Q_2) est donc orthogonale. On va la normalisée.
$< Q_0,Q_0 >= 1.1+0.0+0.0 = 1$, $< Q_1,Q_1 >= 0.0+1.1+0.0 = 1$, $< Q_2,Q_2 >= 0.0+0.0+2.2 = 4$
On pose $P_0 = Q_0 = 1$, $P_1 = Q_1 = X-1$ et $P_2 = \frac{Q_2}{\sqrt{<Q_2,Q_2>}} = \frac{(X-1)^2}{2}$

Alors $\boxed{(P_0,P_1,P_2) = (1, X-1, \frac{(X-1)^2}{2}) \text{ est une base orthonormale de } E}$

3°) On note $U^\perp$ le projeté orthogonale de U sur $\mathbb{R}_1[X]$.
Par la formule de projection orthogonal, comme (P_0,P_1) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ (cf 2°)), on a :
$U^\perp =< U,P_0 > P_0+ < U,P_1 > P_1$
On a : $U = X^2-4$, $U' = 2X$ et $U'' = 2$
Donc $< U,P_0 >= -3.1+2.0+0.0 = -3$, $< U,P_1 >= -3.0+2.1+0.0 = 2$
Alors $U^\perp = -3P_0+2P_1 = -3+2(X-1) = 2X-5$
On sait aussi que la distance de U à $\mathbb{R}_1[X]$ est donnée par $d = \sqrt{< U-U^\perp, U-U^\perp >}$
$U-U^\perp = (X^2-4)-(2X-5) = X^2-2X+1 = (X-1)^2 = Q_1$
On a déjà calculer : $< Q_1,Q_1 >= 4$, donc $d = \sqrt{4} = 2$

$\boxed{\text{La distance de } U \text{ à } \mathbb{R}_1[X] \text{ est donc égale à 2.}}$

4°) a) L'application qui à $P \in E$ associe $P(1)$ est une forme linéaire non nulle dont H est le noyau. On en déduit que H est un hyperplan de E de dimension $dim(E)-1 = 3-1 = 2$.

$\boxed{H \text{ est un sous espace vectoriel de } E \text{ de dimension 2.}}$

4°) b) P_1 et P_2 sont dans H car $P_1(1) = P_2(1) = 0$ et comme H est de dimension 2 et que (P_1,P_2) est libre alors : (P_1,P_2) est une base orthonormale de H.
Par le théorème de projection orthogonale : $\forall P \in E$, $\varphi(P) =< P,P_1 > P_1+ < P,P_2 > P_2$
$< 1,P_1 >= 1.0+0.0+0.0 = 0$, $< 1,P_2 >= 1.0+0.0+0.1 = 0$ donc $\varphi(1) = 0_E$
$< X,P_1 >= 1.0+1.1+0.0 = 1$, $< X,P_2 >= 1.0+1.0+0.1 = 0$ donc $\varphi(X) = P_1 = X-1$
$< X^2,P_1 >= 1.0+2.1+2.0 = 2$, $< X^2,P_2 >= 1.0+2.0+2.1 = 2$
donc $\varphi(X^2) = 2P_1+2P_2 = 2(X-1)+(X-1)^2 = X^2-1X$

$\boxed{\text{La matrice de } \varphi \text{ relativement à } B \text{ est donc } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 4 : ccINP MP 2025, mathématiques 2, exercice 2

1) On calcul $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $HR_n \Leftrightarrow P_n$ est de degré n de coefficient dominant 2^{n-1}

Initialisation : Evident puisque $P_1 = X = 2^{1-1}X$ et $P_2 = 2X^2 - 1 = 2^{2-1}X^2 - 1$

Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n et au rang $n+1$ et on la montre au rang $n+2$
Alors $P_{n+2} = 2X \underbrace{P_{n+1}}_{deg=n+1} - \underbrace{P_n}_{deg=n} = \underbrace{2XP_{n+1}}_{deg=1+n+1} - \underbrace{P_n}_{deg=n}$
On a alors $deg(P_{n+2}) = n+2$ et le coefficient dominant vaut $2 \times (\text{coeff dom. de} P_{n+1}) = 2 \times 2^{n+1-1} = 2^{n+2-1}$
On a bien la propriété au rang $n+2$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n de coefficient dominant 2^{n-1}

Comme $P_0 = 1$ alors on peut conclure :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ deg(P_n) = n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ le coefficient dominant de } P_n \text{ vaut } 2^{n-1}}$
$\boxed{\text{et le coefficient dominant de } P_0 \text{ vaut } 1}$

2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$

Initialisation : Pour $n = 0$ $cos(0\theta) = 1 = P_0(\cos(\theta))$ et pour $n = 1$ $cos(1.\theta) = 1 = P_1(\cos(\theta))$

Hérédité : On a la formule trigonométrique : $cos((n+2)\theta) + cos(n\theta) = 2cos(\theta)cos((n+1)\theta)$
Si on suppose HR_n et HR_{n+1} alors :
$cos((n+2)\theta) + P_n(cos(\theta)) = 2cos(\theta)P_{n+1}(cos(\theta))$ donc :
$cos((n+2)\theta) = 2cos(\theta)P_{n+1}(cos(\theta)) - P_n(cos(\theta)) = P_{n+2}(cos(\theta))$
Et on a bien HR_{n+2}

Conclusion : on a montrer que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)}$

3) On considère $< P, Q >= \int\limits_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$
Comme $t \mapsto arcos(t)$ est une bijection, de classe C^1, de $]-1, 1[$ vers $]0, \pi[$, alors on peut effectuer dans l'intégrale $< P, Q >$ le changement de vriable C^1 bijectif : $\theta = arccos(t)$
On a alors : $d\theta = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ et $t = cos(\theta)$
Alors $< P, Q >$ est de même nature que : $\int\limits_0^{\pi} P(cos(\theta))Q(cos(\theta))d\theta$ qui est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On en déduit : $\boxed{< P, Q > \text{ convergente.}}$

4) On pose $E = \mathbb{R}_k[X]$. Soit $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
i) $< P, Q >) =< Q, P >$ évident par commutativité du produit
ii) $< P + \lambda Q, R >=< P, R > +\lambda < Q, R >$ par linéarité de l'intégrale puisque les intégrales sont convergentes
iii) $< P, p >= \int\limits_{-1}^{1} \frac{P(t)^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et comme $\forall t \in]-1; 1[\quad \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ alors $< P, P >\geq 0$

iv) $< P, P >= 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$, on a l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $]-1;1[$ donc, par le théorème de l'intégrale nulle généralisée
$\forall t \in]-1;1[\quad \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ et donc $P(t) = 0$ sur $]-1;1[$
Comme P est un polynôme ayant une infinité de racine, alors P est le polynôme nul et donc $P = 0_E$

On a donc, d'après les points i),ii),iii),iv), que : $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}_k[X]}$

5) Comme : $cos(n\theta)cos(m\theta) = \frac{1}{2}(cos((n+m)\theta) + cos((n-m)\theta))$

Donc $\int_0^\pi cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\Big(\int_0^\pi cos((n+m)\theta)d\theta + \int_0^\pi cos((n-m)\theta)d\theta\Big)$

Mais, si $k \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^\pi cos(k\theta)d\theta = [\frac{sin(k\theta)}{k}]_0^\pi = 0$

On distingue donc trois cas :

Cas 1 : $n \neq m$
Alors $n - m \neq 0$ et $n + m \geq 0$ et $n \neq m$ donne $n + m \neq 0$
On en déduit $\int_0^\pi cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta = 0$

Cas 2 : $n = m = 0$
$\int_0^\pi cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$

Cas 3 : $n = m > 0$
$\int_0^\pi cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\Big(\int_0^\pi cos((2n)\theta)d\theta + \int_0^\pi 1 d\theta\Big) = \frac{\pi}{2}$ car $n + m = 2n > 0$

Bilan : $\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \ , \ \int_0^\pi cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}}$

6) Si on reproduit le changement de variable de la question Q2) on trouve : $< P_n, P_m >= \int_0^\pi P_n(\cos(\theta))P_m(\cos(\theta))d$
Avec la question Q5) on peut donc affirmer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$. Comme son cardinal vaut $dim(\mathbb{R}_k[X]) = k + 1$ alors c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.
On peut normer cette famille avec la question 5) et on obtient :
$\boxed{\Big(\frac{P_0}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}P_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}P_2}{\sqrt{\pi}}, \ldots, , \frac{\sqrt{2}P_k}{\sqrt{\pi}}\Big) \text{ est une base de } \mathbb{R}_k[X] \text{ pour } <,>}$

Exercice 5 : Centrale PSI 2025, mathématiques 1, début

Q1) Notons $[AX]_i$ le ième coefficient de AX. Alors : $[AX]_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,k}x_k =< L_i, X >$

Par Cauchy-Schwarz : $|< L_i, X >| \leq ||L_i|| \underbrace{||X||}_{=1} = ||L_i|| \leq M$

Alors : $||AX||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(< L_i, X >)}_{\leq M}^{2} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} M^2 = nM^2$

En prenant la racine : $\boxed{||AX|| \leq \sqrt{n}M}$

Q2) • L'ensemble $\{||AX|| \ , \ X \in \mathbb{R}^n \ , \ ||X|| = 1\}$ est non vide (il y a au moins un vecteur de norme 1 dans $\mathbb{R}^n$ puisque $n \geq 1$) et majorée par la question Q1), donc on peut prendre son sup et donc $N(A)$ est définie pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{L'application } N \text{ est bien définie sur } LM_n(\mathbb{R}).}$

• Si $X_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ alors $\frac{||AX_0||}{||X_0||} = \left|\left| A \underbrace{\frac{X_0}{||X_0||}}_{\text{de norme 1}} \right|\right|$ donc :

$\{||AX|| \ , \ X \in \mathbb{R}^n \ , \ ||X|| = 1\} = \{||AX_0|| \ , \ X_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ x_0 \neq 0\}$ et donc : $\boxed{N(A) = \sup\limits_{X_0 \neq 0} \frac{||AX_0||}{||X_0||}}$

Q3) Déjà, pour commencer, on remarque que N est une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ (sup d'un ensemble de valeurs positives).

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $N(\lambda A) = \sup\limits_{||X||=1} ||\lambda AX|| = \sup\limits_{||X||=1} |\lambda| \, ||AX|| = |\lambda| \sup\limits_{||X||=1} ||AX||$, donc $N(\lambda A) = |\lambda| \, N(A)$

ii) $N(A) = 0$

$\Rightarrow \sup\limits_{||X||=1} ||AX|| = 0$

$\Rightarrow \sup\limits_{X_0 \neq 0} \frac{||AX_0||}{||X_0||} = 0$

$\Rightarrow \forall X_0 \neq 0 \ , \ \frac{||AX_0||}{||X_0||} = 0$

$\Rightarrow \forall X_0 \neq 0 \ , \ ||AX_0|| = 0$

$\Rightarrow \forall X_0 \neq 0 \ , \ AX_0 = 0$

$\Rightarrow \forall X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ , \ AX_0 = 0$ (résultat évident pour $X_0 = 0$)

$\Rightarrow A = 0$

iii) Si $||X|| = 1$ alors : $||(A + B)X|| = ||AX + BX|| \leq ||AX|| + ||BX|| \leq N(A) + N(B)$

On passe au sup sur les X de normes 1 et on a : $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$

On a donc : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2 \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \begin{cases} N(\lambda A) = |\lambda| \, N(A) \\ N(A) = 0 \Rightarrow A = 0_{M_n(\mathbb{R})} \\ N(A + B) \leq N(A) + N(B) \end{cases}$ et donc :

$\boxed{N \text{ est une norme sur } M_n(\mathbb{R})}$

Q4) Soit $N = (n_{i,j})$ avec $n_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \geq j \\ 1 \text{ si } j > i \end{cases}$, alors $N \neq 0$ et $S(N) = 0$, donc :

$\boxed{S \text{ n'est pas une norme sur } M_n(\mathbb{R})}$

Q5) On pose $\delta = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$

Si $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de norme 1. Alors $\Delta X = (\delta_1 x_1, \ldots, \delta_n x_n)$ donc

$$||\Delta X|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta^2 x_i^2} \leq \sqrt{\delta^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{1}} = \delta$$

En passant au sup on a : $N(\Delta) \leq \delta$.

Comme δ est un max, il est atteint en i_0. Alors $\Delta E_{i_0} = \delta_{i_0}$ donc $||\Delta E_{i_0}|| = |\delta_{i_0}| = \delta$

Comme $||E_{i_0}|| = 1$ alors $N(\Delta) \geq \delta$

$\begin{cases} N(\Delta) \geq \delta \\ N(\Delta) \leq \delta \end{cases}$ donc $N(\Delta) = \delta$.

Bilan : $\boxed{N(\Delta) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|}$

Q6) L'application $N : X \mapsto ||AX||$ est une application continue sur le fermé bornée $\{X \ , \ ||X|| = 1\}$ (sphère unité), donc est bornée et atteint ses bornes, donc le sup définissant $N(A)$ est un max.

Donc : $\boxed{N(A) = \max\limits_{||X||=1} ||AX||}$

Q7) Si X est nulle alors $||AX|| = 0 \leq N(A)\,||X||$

Si X est non nulle : $\left|\left|\frac{AX}{||X||}\right|\right| \leq N(A) \Rightarrow \frac{1}{||X||}\,||AX|| \leq N(A) \Rightarrow ||AX|| \leq N(A)\,||X||$

Bilan : $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n \ , \ ||AX|| \leq N(A)\,||X||}$

Q8) Soit $X \in \mathbb{R}^n \ , \ ||X|| = 1$. On utilise Q7)

Alors $||(AB)X|| = ||A(BX)|| \leq N(A)\,||BX|| \leq N(A)N(B)$ puisque $||BX|| \leq N(B)$

En passant au sup sur X de norme 1, on a : $\boxed{N(AB) \leq N(A)N(B)}$

Q9) $C_i = AE_i$ et $||AE_i|| \leq N(A)$ (puisque E_i est de norme 1), donc $||C_i|| \leq N(A)$

En passant au max sur $i \in [\![1, n]\!]$ on a : $\boxed{\max\limits_{1 \leq i \leq n} ||C_i|| \leq N(A)}$

Q10) • Soit $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de norme 1.

Si A a toute ses colonnes nulle sauf la dernière, alors $AX = x_n C_n$ donc $||AX|| = ||x_n C_n|| = \underbrace{|x_j|}_{\leq ||X|| = 1} ||C_n|| \leq ||C_n||$

En passant au sup sur X de norme 1, on a : $N(A) \leq ||C_n||$

Avec Q9) on a : $\max\limits_{1 \leq i \leq n} ||C_i|| = ||C_n|| \leq N(A)$

Par double inégalité on a donc :

$\boxed{\text{Si } A \text{ a toute ses colonnes nulles sauf la dernière alors : } N(A) = ||C_n||}$

• On en déduit que : $\boxed{\text{si } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } N(A) = \sqrt{2}}$