PSI* 2025-2026

A rendre le jeudi 11 décembre 2025

Devoir à la maison n°6 de Mathématiques

Code couleur :	noir	exo 1 et exo 2 pour réviser, après plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile (ou 5/2 uniquement)

EXERCICE 1 : Suite et série de fonctions

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & nxe^{-nx^2} \end{array}$

A) Suite de fonctions

1°) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0, +\infty[$.

3°) La convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4°) Soit $a > 0$. La convergence est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$?

B) Séries de fonctions

On pose, lorsque c'est possible : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

5°) Déterminer le domaine de définition de S.

6°) La convergence est-elle normale sur ce domaine ?

7°) Montrer que S est est continue sur $\mathbb{R}^*$.

8°) En utilisant $\int\limits_a^x S(t)dt$ avec $a > 0$, déterminer une expression de $S(x)$ en fonction de x (et de la fonction sh)

EXERCICE 2 : Exercice oral ccINP 2025

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |xt+y|$

1) Montrer que N est une norme.

2) Dessiner la boule unité associé à N.

3) Trouver $\alpha > 0$ le plus grand possible et $\beta > 0$ le plus petit possible tels que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \ , \ \alpha N(X) \leq ||X||_\infty \leq \beta N(X)$$

EXERCICE 3 : Exercice oral Mines télécom 2025

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{exp(-nx)}{1+n^2} \end{array}$

En cas de convergence pose : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

a) Donner la domaine de définition de S.

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$

c) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

d) S est-elle dérivable en 0 ?

EXERCICE 4 : début de Centrale, Mathématiques 2 PSI 2025

Partie A – Deux approches pour une valeur à 1+2+$\cdots$+ n + $\cdots$

I – Une première approche

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Q1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q3. À l'aide de développements limités en 0, déterminer trois constantes réelles a, b et c telles qu'au voisinage de 0 $\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + c + o(1)$.

Q4. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2}\right)$.

EXERCICE 5 : problème issue de ccinp 2025 MP, mathématiques 1

PROBLÈME
Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.

Partie I – Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$, $J_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.

1. Préciser la monotonie des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis démontrer que pour tout entier k non nul, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k-1)$.

2. Démontrer que pour tout entier n non nul, $S_n - f(0) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1}$.

3. Démontrer enfin les deux résultats:

   (a) f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, si et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge.

   (b) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)$ converge.

4. Un exemple.

   On pose pour tout $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^{\alpha}}$.

   (a) Étudier la monotonie de la fonction f, calculer $\displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}$.

   (b) Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln(2)$, un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}$.

5. Une application.

   On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$.

   (a) En utilisant le résultat 3b de la question 3, établir que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

(b) Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

6. Une application sur une série de fonctions.

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ où pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

(a) Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur $]0,+\infty[$.

(b) On pose pour x fixé non nul, $f(t) = \dfrac{x}{t^2+x^2}$.

Établir que, pour n entier non nul, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$.

(c) En déduire que, pour tout x non nul, $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(d) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Partie II – Contre-exemples

1. On pose pour $x \in [1,+\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

(a) Calculer, pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

On pourra remarquer que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

(b) Établir que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\left(\lfloor x \rfloor - 1\right)$.

La fonction f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? Que dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$?

2. On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1,+\infty[$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ diverge.

Pour tout entier n non nul, trouver un réel a_n de sorte que le triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\frac{1}{n^2}$.

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction f définie et continue sur $[1,+\infty[$ de la manière suivante: chaque entier naturel n non nul a pour image 1 et autour de chaque n (sur chaque intervalle $[n-a_n, n+a_n]$) tracer l'allure du triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1. Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles $[n-a_n, n+a_n]$.

Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

FIN