Chapitre 11 : Séries de fonctions, exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 11.1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$ et on considère la série de fonctions $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
Etudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence normale de $\sum u_n$

Correction

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$
On a donc $||u_n||_\infty^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente on a alors par la règle de comparaison que $\sum ||u_n||_\infty^{\mathbb{R}}$ est convergente.

D'après le cours : la série de fonctions $\sum u_n$
est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément et simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Enoncé, Exercice 11.2

On pose : $I = [0, +\infty[$ et $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (-1)^n x e^{-nx^2}$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur I.

b) La convergence de $\sum f_n$ est-elle normale sur I ?

c) La convergence est-elle uniforme sur I ?

Correction

a) Pour x fixé dans I on a : $n^2 f_n(x) = (-1)^n n^2 x e^{-nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $f_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et à termes positifs, alors, par négligeabilité, on a $\sum f_n(x)$ qui est convergente.

$\boxed{\sum f_n \text{ est donc une série de fonctions simplement convergente sur } I.}$

b) Fixons $n > 0$ et étudions $F_n = |f_n|$ sur I. On a : $\forall x \in I \ , \ F_n(x) = xe^{-nx^2}$
F_n est dérivable sur I et $\forall x \in I \ , \ F_n(x) = e^{-nx^2} - 2nx^2e^{-nx^2} = e^{-nx^2}(1-2nx^2)$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$F'_n(x)$		$+$	0	$-$	
F_n	0	$\nearrow$	a_n	$\searrow$	0

avec $a_n = F_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \frac{1}{\sqrt{2n}} exp(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2en}}$

On en déduit que $||f_n||_{I,\infty} = \frac{1}{\sqrt{2en}}$

Comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente alors $\sum ||f_n||_{I,\infty}$ est divergente et donc $\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } I}$

c) On pose $\forall x \in I \ , \ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ le reste de le la série de fonctions.
Comme, à x fixé, $|f_n(x)| = xe^{-nx^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées et on obtient : $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e(n+1)}}$ en utilisant l'étude du b). On a donc $||R_n||_{I,\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2e(n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément sur } I}$

Enoncé, Exercice 11.3

Pour $x > 0$ on pose : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

a) Montrer que S est bien définie et est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Montrer que : $\forall x > 0 \ , \ S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$
d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0^+
e) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$

Correction

---

a) Posons $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x > 0 \ , \ u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$

On a alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et on étudie la série de fonctions $\sum u_n$.

Pour $x > 0$ fixé, on a $\sum u_n(x)$ est une série alternée, avec $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante. On peut donc appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées, on en déduit que $\sum u_n(x)$ est convergente et donc que S est définie sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$

On a de manière directe : $||u'_n||_\infty^{[a,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann) alors $\sum ||u_n'||_\infty^{[a,+\infty[}$ est convergente et donc $\sum u_n'$ converge normalement (et donc uniformément) sur $]0,+\infty[$

On a donc : $\begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[\\ \sum u_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur }]0,+\infty[\\ \sum u_n' \text{ converge uniformément sur }]0,+\infty[\end{cases}$ donc par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on a : S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0\ ,\ S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$

$\boxed{S \text{ est bien définie et de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$

b) Pour x fixé, on a $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ qui est une série alternée.

Comme $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et que $\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées, on retrouve que $\sum u_n'(x)$ est convergente mais surtout que $S'(x)$ est du signe de $u_0'(x)=\frac{-1}{x^2}<0$

On en déduit que $\forall x>0\ , S'(x)<0$ et donc que $\boxed{S \text{ est décroissante sur }]0;+\infty[}$

c) Soit $x>0$. Alors :

$S(x+1)+S(x)$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(x+1)}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ changement d'indice $k=n+1$ dans la première somme, $k=n$ dans la seconde

$=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+x}+\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}$

$=-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}+\frac{1}{x}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}$

$=\frac{1}{x}$

On a donc : $\boxed{\forall x>0\ ,\ S(x+1)+S(x)=\frac{1}{x}}$

d) D'après c) on a : $S(x)=\frac{1}{x}-S(x+1)$ et comme S est continue en 1 on a $S(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}S(1)\in\mathbb{R}$

Comme de plus $\frac{1}{x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$

On en déduit $\boxed{S(x)\sim\frac{1}{x} \text{ au voisinage de } 0^+}$

Remarque : on a même $S(x)=\frac{1}{x}-S(1)+o(1)$ et comme $S(1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=ln(2)$

On a au voisinage de 0^+ on a : $\boxed{S(x)=\frac{1}{x}-ln(2)+o(1)}$

e) S est décroissante donc $S(x-1)\geq S(x)\geq S(x+1)$, on ajoute $S(x)$ et on a :

$S(x-1)+S(x)\geq 2S(x)\geq S(x)+S(x+1)$

On utilise le c) et on obtient : $\frac{1}{x-1}\geq 2S(x)\geq\frac{1}{x}$ et donc $\frac{x}{x-1}\geq 2xS(x)\geq 1$

Par encadrement on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}2xS(x)=1$ et on en déduit : $\boxed{S(x)\sim\frac{1}{2x} \text{ au voisinage de } +\infty}$

Enoncé, Exercice 11.4

Pour $x \in I =]1, +\infty[$ on pose : $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$
Montrer que ζ est de classe C^∞ sur I.

Correction

- Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{n^x} \end{array}$

On a alors : $\forall x \in I$, $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

- $\forall x \in I$, $f_n(x) = exp(-xln(n))$, on en déduit donc que f_n est C^∞ sur I.

Par une récurrence simple on montrerai que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $f_n^{(i)}(x) = (-ln(n))^i exp(-xln(n)) = \frac{(-ln(n))^i}{n^x}$

- Fixons $a > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$ et prenons $b \in]1, a[$.

Alors : $\forall i \in [\![0; k-1]\!]$, $\forall x \in [a, +\infty[$, $\left| \frac{f_n^{(i)}(x)}{\frac{1}{n^b}} \right| = \frac{(ln(n))^i}{n^{x-b}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $x - b > 0$ puisque $x > a$ et $b < a$

Par comparaison exp-puissance, on en déduit $f_n^{(i)}(x) = o(\frac{1}{n^b})$.
Mais $b > 1$ et $\sum \frac{1}{n^b}$ est une série à termes positifs convergente d'après Riemann.
Par négligeabilité on en déduit donc que $\sum f_n^{(i)}(x)$ est convergente.
On a donc démontré la convergence simple sur $[a, +\infty[$ des $\sum f_n^{(i)}$ pour $i \in [\![0; k-1]\!]$.

- Pour $x \in [a, +\infty[$ on a : $0 \leq \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{(ln(n))^k}{n^a}$ car $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$

On en déduit : $\left|\left| f_n^{(k)} \right|\right|_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{t \in [a,+\infty[} \left| f_n^{(k)}(t) \right| \leq \frac{(ln(n))^k}{n^a}$

On a vu ci-dessus que $\sum \frac{1}{(ln(n))^k n^a}$ était convergente, donc par comparaison $\sum \left|\left| f_n^{(k)} \right|\right|_\infty^{[a,+\infty[}$ est convergente et $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$.

- On a donc : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } [a, +\infty[\\ \forall i \in \ [\![0; k-1]\!] \ , \ \sum f^{(i)} \text{ converge simplement sur } [a, +\infty[\\ \sum f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[\end{cases}$

Par la généralisation du théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que ζ est de classe C^k sur $[a, +\infty[$ et que $\forall i \in [\![0; k]\!]$, $\forall x \in [a, +\infty[$, $\zeta^{(i)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(i)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-ln(n))^i}{n^x}$

- Comme ce résultat est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors on peut passer à ζ est C^∞ sur $[a, +\infty[$.

- Comme ce résultat est valable pour tout $a > 1$ et que $I =]1, +\infty[= \bigcup\limits_{a>1} [a, +\infty[$, alors on peut passer à ζ est C^∞ sur I.

- Bilan : $\boxed{\zeta \text{ est } C^\infty \text{ sur } I \text{ et } \forall i \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in I \ , \ \zeta^{(i)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} = \frac{(-ln(n))^i}{n^x}}$