

Feuille d'exercices n°29 : chap. 12

Exercice 257. On considère la série entière $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{1+n+\sqrt{n}}$

- Etudier la convergence de $S(-1)$
- Etudier la convergence de $S(1)$
- Déterminer le rayon de convergence de S .

Exercice 258. En utilisant la règle de D'Alembert pour les séries numériques, déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{ch(n)x^{2n+1}}{3^n n^3}$.

Exercice 259. a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z^{n^2}|$ suivant $z \in \mathbb{C}$.

- En déduire le rayon de convergence de la série entière suivante $\sum z^{n^2}$.

Exercice 260. On considère la série entière $\sum u_n z^n$ avec $u_n = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n-e}}{\sqrt{\cos(\frac{1}{n})}}$, et on note R son rayon de convergence.

- Trouver un équivalent, en $+\infty$ de u_n
- Déterminer R .

Exercice 261. Soit (a_n) une suite convergente de limite non nulle. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$

Exercice 262. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned}
 A(z) &= \sum \frac{1+n+n^2}{n^3+1} z^n & B(z) &= \sum \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n)+1+\sin(n)} z^n \\
 C(z) &= \sum \frac{z^{2n}}{2^n} & D(z) &= \sum \frac{z^{n^{36}+n^5+2}}{n^{36}+n^5+2} \\
 E(z) &= \sum \exp(-\sqrt{n}) z^n & F(z) &= \sum \frac{3^n}{n^3} z^n \\
 G(z) &= \sum \frac{2^n+n}{3^n+n^2} z^{2n} & H(z) &= \sum (\sqrt[3]{n^3+n+1} - \sqrt{n^2+2n+1}) z^n \\
 I(z) &= \sum \frac{n!+n^n}{n!+n^n} z^n & J(z) &= \sum \ln(n)^{\ln(n)} z^n \\
 K(z) &= \sum \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n & L(z) &= \sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2} z^{2n+1} \\
 M(z) &= \sum \frac{\cos^2(n)}{n} z^n & N(z) &= \sum \frac{(2n)!}{n^n} z^n \\
 O(z) &= \sum \frac{2+\sin(n+1)}{1+\sqrt{n}} z^n & P(z) &= \sum \frac{n!+\sin(n!)}{(-1)^n+n^2} z^n \\
 R(z) &= \sum \int_0^1 t^n \sqrt{2+\cos(t)} dt z^n & S(z) &= \sum a^{n^2} z^{1+2+3+\dots+n}
 \end{aligned}$$

Exercice 263. Soit A un nombre réel qui ne soit pas élément de $\mathbb{Q}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note a_n la n -ième décimale de A .

Déterminer R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

Exercice 264. ★

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$

Montrer que : $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$

Exercice 265. ★

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$ Soit $\alpha > 0$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^\alpha z^n$