

Feuille d'exercices n°30 : chap. 12

Exercice 266. On pose $I =]-1; 1[$.

a) Calculer $\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$

b) Calculer $\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$

c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

d) Résoudre $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n)x^n = 4$

Exercice 267. On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

a) Déterminer le rayon de convergence R de S .

b) Calculer $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de série sur $] - R; R[$.

c) Calculer $S(x)$ sur $] - R; R[$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 268. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer les sommes sur les intervalles ouverts de convergence.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 1)(-1)^n x^n \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+3n+2} x^n \quad D(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{3^n} x^{2n+1}$$

Exercice 269. (★)

a) Déterminer le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$

b) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in]-1; 1[\quad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b+cx}{1-x+x^2}$

c) Calculer S sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 270. On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

a) Déterminer le rayon de convergence de S .

b) Calculer S sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 271. Déterminer le rayon de convergence et calculer sur son intervalle de convergence

la série suivante : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n$

Exercice 272. (★)

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt \right) z^n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}}{1-zt} dt$

Exercice 273. (★)

Calculer $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$