Feuille d'exercices n°31 : chap. 12

Exercice 274. ⋆⋆
a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ $\int\limits_0^1 x^n ln(x)dx$
b) Montrer que : $\int\limits_0^1 ln(x)ln(1-x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$

Exercice 275. *Soit* $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ *la suite de nombres réels définie par* $a_0 = a_1 = 1$ *et pour tout* $n \geq 1$ *:* $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$
a) Etablir que pour tout entier $n \geq 1$ *:* $1 \leq a_n \leq n^2$
b) Déterminer le rayon de convergence R *de la série entière* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
c) Montrer que S *est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on notera* (E).
d) Résoudre (E) *sur* $]-R;R[$
e) Déterminer S.

Exercice 276. *On pose* $f(x) = \begin{cases} \frac{sh(x)}{x} \text{ pour } x \neq 0 \\ 1 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
Montrer que f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 277. *On pose* $f(x) = \frac{ln(1-x)}{x}$
a) Déterminer D*, le domaine de définition de* f.
b) Montrer que f *est prolongeable par continuité en* 0.
On pose $I = D \cup \{0\}$ *et on note encore* f *la fonction prolongée par continuité.*
c) Montrer que f *est* C^∞ *sur* I.

Exercice 278. *On pose* $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(x)}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \\ \lambda \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
Quelle valeur donner à λ *pour que* f *soit de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 279. *a) Déterminer le développement en série entière en 0 de* $a(x) = arctan(x)$
b) Déterminer le développement en série entière en 0 de $b(x) = exp(-x^2)$
c) Déterminer le développement en série entière en 0 de $c(x) = \int\limits_0^{x^2} exp(-t^2)dt$
d) Déterminer le développement en série entière en 0 de $d(x) = \frac{x^3+2}{x^2+x-2}$
e) Déterminer le développement en série entière en 0 de $e(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
f) Déterminer le développement en série entière en 0 de $f(x) = (1+x)ln(1-x)$
g) Déterminer le développement en série entière en 0 de $g(x) = sin(x)cos(2x)$
h) Déterminer le développement en série entière en 0 de $h(x) = exp(\sqrt{3}x)sin(x)$
i) Déterminer le développement en série entière en 0 de $i(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$
j) Déterminer le développement en série entière en 0 de $j(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
k) Déterminer le développement en série entière en 0 de $k(x) = arcsin(x)$
l) Déterminer le développement en série entière en 0 de $l(x) = ln(1+x-2x^2)$