Feuille d'exercices n°31 : chap. 12

Exercice 280. $\star$

Soit $\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} exp(\frac{-1}{t}) \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases} \end{array}$

1°) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}(X)$, $\forall t > 0$, $f^{(n)}(t) = P_n(t)exp(\frac{-1}{t})$

2°) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$
3°) f est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 281. *(D'après ccINP PC 2019)*
On souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. *Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.*

2. *Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :*
$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

3. *Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

4. *En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

5. *Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction*
$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$
est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.