

Feuille d'exercices n°31 : chap. 12

Exercice 282. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Leftrightarrow 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) = 0$$

Trouver les solutions de (E) développable en série entière.

Exercice 283. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Leftrightarrow 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) = 0$$

Trouver les solutions de (E) développable en série entière.

Exercice 284. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \int_0^x \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) dt$$

a) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f .

b) Montrer que f est développable en série entière en 0 et déterminer son développement.

Exercice 285. Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Leftrightarrow (1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

Exercice 286. Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Leftrightarrow 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$$

Exercice 287. Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Leftrightarrow x(x^2 + 1)y''(x) + 2(x^2 + 1)y'(x) - 2xy(x) = 0$$

Exercice 288. Déterminer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$

Exercice 289. Déterminer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

Exercice 290. (★)

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n , I_3 et A .

b) Montrer que l'on peut définir $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ et calculer $\exp(A)$

c) Montrer que l'on peut définir $\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!}$ et calculer $\cos(A)$

d) Peut-on définir $\ln(1 + A)$ de la même manière ?