

Mathématiques : contrôle des connaissances n°6

1°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{ccc} f_n & : & [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t \longmapsto \frac{nx}{(n+1)(x+1)} + x^n \end{array}$$

a) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

b) Est-ce que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$?

c) Soit $a \in [0, 1[$. Est-ce que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$?

2°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$.

a) Donner la définition de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

b) Énoncer le théorème d'intégration sur un segment d'une suite de fonction.

3°) Effectuer le développement limité en 0, à l'ordre 3 de : $f(x) = \ln(1 + x - x^2)$

4°) Montrer que : $A = \int_0^{+\infty} e^{-t^4} dt$ est convergente.

Mathématiques : contrôle des connaissances n°6

1°) Effectuer le développement limité en 0, à l'ordre 3 de : $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$

2°) Montrer que : $A = \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt$ est convergente.

3°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $t \longmapsto x^n + \frac{nx}{(n+1)(x+1)}$

a) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

b) Est-ce que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$?

c) Soit $a \in [0, 1[$. Est-ce que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$?

4°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$.

a) Donner la définition de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

b) Énoncer le théorème de dérivation d'une suite de fonction.