Chapitre 11 : Séries de fonctions

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et les applications considérées sont de I dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Modes de convergence d'une séries de fonctions

1.1 Convergence simple

1.1.1 Définitions

Définitions. *Soit* $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* K.
Alors on pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ *et on définit ainsi une suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* I *dans* K.

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée suite des sommes partielles de la série* $\sum f_n$

On dit que :
la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** *sur* I *(ou sur une partie* D *de* I*)*
si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** *sur* I *(ou sur une partie* D *de* I*)*

On note $D = \{t \in I\ ,\ (S_n(t)_{n\in\mathbb{N}})\ \text{converge}\}$.

La fonction S *définie sur* D *par* $\forall t \in D\ ,\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ *est appelée fonction somme de la série* $\sum f_n$

Remarques. *On gardera ces notations.*
On va bien sûr utiliser les suites de fonctions ...

1.1.2 Exemples

exemple 1

Soit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & n^2t^4e^{-tn} \end{array}$

exemple 2

Soit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n^x} \end{array}$

1.2 Convergence uniforme

1.2.1 Définition

Définition. *On dit que :*
la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** *sur* I *(ou sur une partie* D *de* I*)*
si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** *sur* I *(ou sur une partie* D *de* I*)*

1.2.2 Théorème

En pratique, on pose $\forall t \in D\ ,\ R_n(t) = S(t) - S_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$ qui est appelé reste de la série de fonctions $\sum f_n$.

On a alors, le théorème suivant :

Théorème . *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions convergeant simplement vers* S *sur* D.

Alors : $\sum f_n$ *converge uniformément sur* D
si et seulement si (R_n) *converge uniformément vers la fonction nulle sur* D

preuve :

1.2.3 Exemples

exemple 1

Montrer que $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{1+n^2}$ converge uniformément sur $[0, 1]$

exemple 2

Montrer que $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour $a > 1$, mais pas sur $]1, +\infty[$.

1.3 Convergence normale

1.3.1 Définition

Définition. *Soit $(f_n : I \longrightarrow K)$ une suite de fonctions* **bornées sur** I.

Alors on dit que : la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si $\sum ||f_n||_\infty^I$ est convergente.

1.3.2 CN $\Rightarrow$ CU $\Rightarrow$ CS

Théorème . $\sum f_n$ *converge normalement sur I*
$\Rightarrow \sum f_n$ *converge uniformément sur I*
$\Rightarrow \sum f_n$ *converge simplement sur I*

Remarques. *Pour montrer la convergence normale on essaye d'obtenir une majoration de la forme $|f_n(t)| \leq a_n$ avec $\sum a_n$ convergente.*
On a donc $CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$

preuve :

1.3.3 Exemples

exemple 1

$\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$
CN sur $[a, +\infty[$ pour $a > 1$ mais pas sur $]1, +\infty[$

exemple 2

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+t^2}$

Etude de la CS, de la CU et de la CN ...

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Continuité

2.1.1 En un point

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonction de I dans K et $a \in I$. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue en } a \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases} \Rightarrow \text{la fonction somme } S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue en } a.$$

preuve :

2.1.2 Sur un intervalle

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonction de I dans K. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } I \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases} \Rightarrow \text{la fonction somme } S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } I$$

Remarque. *On pourra montrer la convergence normale sur I, ou sur tout segment inclus dans I, où directement la convergence uniforme sur I, ou sur tout segment de I ...*

preuve :

2.1.3 Exemples

exemple 1

$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1; +\infty[$

exemple 2

$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2.2 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a; b]$ dans K. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est continue sur } [a; b] \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a; b] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [a; b] \\ \text{la série numérique } \sum \int_a^b f_n(t)dt \text{ est convergente et } \int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt \end{cases}$$

Remarque. *Autrement dit :* $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$

Exemple. *Soit $1 < a < b$, intégrale de* $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

2.3 Dérivation : théorème de dérivation terme à terme

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n' \end{cases}$$

Remarque. *On peut bien sûr raisonner sur des segments inclus dans I et passer à I ensuite ...*

preuve :

Exemple. *Dérivée de la fonction ζ*

Exemple. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n cos(nx)}{n^3}$ *est de classe C^1 sur $]-1;1[$*

2.4 Généralisation

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans K et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0; k-1]\!] \text{ la série de fonctions } \sum f_n^{(i)} \text{ converge simplement sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0; k]\!] \ , \ S^{(i)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)} \end{cases}$$

Remarque. *On peut bien sûr raisonner sur des segments inclus dans I et passer à I ensuite ...*

preuve :

Exemple. *éventuellement la fonction ζ ...*

3 Théorème de la double limite

3.1 Version : suite de fonctions (plus au programme ?)

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une extrémité éventuellement infinie de I.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ une fonction. Alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la suite } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n \end{cases}$$

Remarque. $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & f \\ \downarrow x \to a & & \downarrow x \to a \\ \lambda_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \lambda \end{array}$$

preuve : Hors programme

3.2 Version : séries de fonctions (au programme)

Théorème . *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* I *dans* K *et* a *une borne de* I *(éventuellement infinie). Alors :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n \\ \text{la série de fonctions} \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la série } (\sum \lambda_n) \text{ est convergente} \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \end{cases}$$

Remarque. $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

preuve : Hors programme

3.3 Exemple

Exemple. *1*

Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nt+in^2 sin(t)}$

Exemple. *2*

Etude en $+\infty$ *et en* 1 *de* $\zeta(x)$

Sommaire

preuve du 1.2.3. exemple 2

- Preuve de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ converge simplement mais ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} f_n & : &]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{n^x} \end{array}$
- D'après le cours :$\sum \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $x > 1$

On peut donc pose : $\forall x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et il y a donc convergence simple sur $]1, +\infty[$

- Posons, $\forall x > 1$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$

Soit $A > 0$. Alors on, comme $\sum \frac{1}{k}$ est divergente à termes positifs, $\exists N > n+1$, $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} > A$

Comme $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}$ et $\lim_{x \to 1^+} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^x} = A$ alors $\sup_{x \in]1,+\infty[} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^x} = A$

Comme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^x}$ alors : $\sup_{x \in]1,+\infty[} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^x} \geq A$

Comme ce résultat est vraie pout tout $A > 0$: $\sup_{x \in]1,+\infty[} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = +\infty$

On ne peut donc pas définir $\sup_{x \in]1,+\infty[} |R_n(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc il n'y a pas convergence uniforme de $\sum \frac{1}{n^x}$ sur $]1, +\infty[$