A rendre le jeudi 8 janvier 2026

Devoir à la maison n°7 de Mathématiques

Code couleur :	noir	exo 1 et exo 2 pour réviser, après plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile (ou 5/2 uniquement)

Exercice 1

a) Déterminer la nature de l'intégrale : $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xln(x)}{1+x^3}dx$

b) Déterminer la nature de la série : $\sum \frac{ln(n)^2}{n^2}$

c) Déterminer le rayon de convergence de le série entière $\sum (-1)^n \frac{sin(n)+2^n}{8^n} z^{2n+1}$

d) Déterminer le rayon de convergence de le série entière $\sum \frac{n!}{(2n)!} z^n$

e) Déterminer, suivant $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a^n+n}{n+1} z^n$

Exercice 2

On pose : $$f : R \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{(sin(x))^2}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère la série entière d'une variable réelle : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

On notera R son rayon de convergence.

a) Déterminer R.

b) Déterminer D le domaine de définition de S.

c) Pour $x \in]-R, R[$, donner une expression "simple" de $S(x)$.

d) Montrer que S est continue sur D.

e) Pour $x \in D$, donner une expression "simple" de $S(x)$.

Exercice 4 : exercice de e3a PC 2025

On considère l'équation (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + x + 1)\, y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E). Calculer $y(0)$.

2. On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2.1. Montrer que l'on a : $\begin{cases} \forall n \geqslant 2, \quad (n^2 - 1)\, a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

2.2. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que : $\forall n \geqslant 1,\quad |a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)\,!}$.

2.3. Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On pose, pour tout x réel, $z(x) = x\, y(x)\, \mathrm{e}^x$.

3.1. Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

3.2. Prouver que z' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$x\, u'(x) - (2x + 1)\, u(x) = 0 \quad (F)$$

d'inconnue la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3.3. Une équation différentielle

3.3.1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right) u = 0$$

3.3.2. Justifier que les solutions sont prolongeables par continuité en 0.

3.4. Démontrer que, pour tout réel c, la fonction $x \mapsto c x\, \mathrm{e}^{2x}$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

On admet que ce sont les seules solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.5. Démontrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = a(2x - 1)\, \mathrm{e}^{2x} + a$$

3.6. Déterminer alors une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5 : exercice de e3a MP 2025

1. **Question de cours :** Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
5. Prouver que pour tout réel positif x, on a $f'(x) \leq \mathrm{e}^x$.
6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y)$. Prouver que l'on a : $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{e}^z|x - y|$.
7. Prouver que l'on a : $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t\,[f(t)]^2} dt$.

8. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.
10. Montrer que : $g(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln(x)$.
11. Prouver que pour tout $t > 0$, $f(t) > 1 + t$.
12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x temps vers $+\infty$.
13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(1 + X)^2}$.
14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :
$$g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2}.$$
15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

PROBLEME : Centrale PC 2025, mathématiques 2

Approximation uniforme des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques