Devoir surveillé de Mathématiques n°4 : TYPE 2

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
• Dessiner un soleil en dessous du mot **FIN**.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

Questions de cours

Q1) Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Q2) Enoncer le théorème de dérivation d'une suite de fonction.

Q3) On considère la partie de $\mathbb{R}^2$ suivante : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ y - x^2 > 1\}$

a) Rappeler la définition d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

b) Démontrer que A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

c) La partie A est-elle bornée ? La partie A est-elle convexe ?

Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \end{array}$

1) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$

On pose : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$

2) a) Soit $M > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, M]$

2) b) Est-ce que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$?

3) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$

3) b) Donner les variations de f sur $[0,+\infty[$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $x_0 \geq n \geq 1$

Montrer que : $f(x_0) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$

4) b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

5) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.
3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.
4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.
   On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.
8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a : $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.
9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 3 : fonction ζ et ζ alternée

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1; +\infty[$ par :
$\forall x \in]1; +\infty[, \ f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Soit $a \in]1; +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in]1; +\infty[, \ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-ln(n))^k}{n^x}$.
   (b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1; +\infty[$ sous forme d'une série.
4. Préciser le sens de variation de ζ.
5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
   (a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \geq 2, \ 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
   (c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.
6. On considère à présent $h \in]0; +\infty[$.
   A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.
8. On pose : $\forall x \in]0; +\infty[, \ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
   (a) Justifier que F est bien définie.
   (b) Monter que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[, \ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.
   (d) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.