Question de cours

Q1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de I dans K et f une fonction de I dans K. Alors :

• on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f si et seulement si $\forall t \in I\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$

• on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction f si et seulement si $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in I\ ,\ |f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon$

Q2) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans K. Alors :

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n' \end{cases}$$

Q3) a) Soit Ω une partie d'un espace vectoriel normé (E, N). Alors, on dit que :
Ω est un **ouvert** de (E, N) si et seulement si $\forall \omega \in \Omega\ ,\ \exists r > 0\ ,\ \mathring{B}(\omega, r) = \{x \in E\ ,\ N(x - \omega) < r\} \subset A$

Q3) b) On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ g(x, y) = y - x^2 - 1$.
On définit alors une fonction continue telle que $B = g^{-1}(]-\infty, 0[)$
Comme l'image réciproque d'un ouvert par une application continue sur $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ on en déduit que $\boxed{B \text{ est une partie ouverte de } \mathbb{R}^2}$

Q3) c) • On remarque que $\forall y > 2\ ,\ (0, y) \in A$ et comme $||(0, y)||_2 \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
alors on a que : $\boxed{A \text{ n'est pas bornée.}}$

• On pose : $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x^2$.
Alors on remarque que : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ y > \varphi(x)\}$
On a de plus φ est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi''(x) = 2 > 0$, donc φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in A$, $(x', y') \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$.
On pose $(X, Y) = \lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y')$ et on a donc $X = \lambda x + (1 - \lambda)x'$ et $Y = \lambda y + (1 - \lambda)y'$

$$\begin{aligned} \varphi(X) = \varphi(\lambda x + (1-\lambda)x') &\leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(x') \text{ car } \varphi \text{ convexe.} \\ &< \lambda y + (1-\lambda)y' \text{ car } (x, y) \in A \text{ et } (x', y') \in A \text{ donc } \varphi(x) < y \text{ et } \varphi(x') < y' \\ &= Y \text{ par définition de } Y \end{aligned}$$

On a donc $(X, Y) \in A$
On a donc : $\forall (x, y) \in A\ ,\ \forall (x', y') \in A\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') \in A$

Par définition de convexité on a donc : $\boxed{A \text{ est un convexe.}}$

Q4) a) • Pour $x = 0$ on a $f_n(x) = 0$ donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

• Pour $x \neq 0$ on a $f_n(x) \sim n\frac{x}{n} = x$ donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$

• On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge donc simplement vers } \begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x \end{array}}$$

Q4) b) Posons $\forall u \geq 0$, $A(u) = \frac{u^3}{6} - u + sin(u)$
Alors on définit une fonction A, de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$
On a : $\forall u \geq 0$, $A'(u) = \frac{u^2}{2} - 1 + cos(u)$ et $A''(u) = u - sin(u)$ et $A'''(u) = 1 - cos(u)$

On a donc le tableau :

u	$0 \qquad +\infty$
$A'''(u)$	$+$
$A''(u)$	$0 \nearrow$
$A''(u)$	$+$
$A'(u)$	$0 \nearrow$
$A'(u)$	$+$
$A(u)$	$0 \nearrow$
$A(u)$	$+$

et donc $\forall u \geq 0$ $\begin{cases} A(u) \geq 0 \\ A''(u) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - sin(u) \leq \frac{u^3}{6} \\ 0 \leq u - sin(u) \end{cases}$

En regroupant ces deux inégalités on a : $\boxed{\forall u \geq 0 \ , \ 0 \leq u - sin(u) \leq \frac{u^3}{6}}$

Q4) c) i) Pour $t \in [0, A]$ on a : $f_n(x) - f(x) = nsin(\frac{x}{n}) - x = n(sin(\frac{x}{n}) - \frac{x}{n})$
On utilise le b) avec $u = \frac{x}{n}$ et on a : $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq n\frac{(\frac{x}{n})^3}{6} = \frac{x^3}{6n^2}$
Comme $x \in [0, A]$ alors : $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \frac{A^3}{6n^2}$
On en déduit $||f_n - f||_\infty^{[0,A]} = \sup\limits_{x\in[0,A]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A^3}{6n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc, par encadrements : $||f_n - f||_\infty^{[0,A]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a bien $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0, A].}$

Q4) c) ii) On remarque que les fonctions f et f_n sont impaires donc $||f_n - f||_\infty^{[0,A]} = ||f_n - f||_\infty^{[-A,A]}$
et avec le raisonnement du c) on a : $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [-A, A].}$

Q4) d) Par l'absurde. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ alors $f_n(n) - n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais $f_n(n) - n = n(sin(1) - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$!!! Absurde
Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 1 : d'après e3A MP math 2021 Exercice 1

1.) Clairement f et les fonctions f_n sont continues sur $]0,1]$, comme produits et sommes de fonctions continues. Il reste à voir la continuité en 0.

Pour $x \in]0,1]$, $f(x) = x^{-x} = exp(-xln(x))$, mais on sait d'après le cours que $xln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, par continuité de exp en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = exp(0) = 1 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.
Grâce à cette limite du cours, on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0 = f_n(0)$ donc f_n est continue en 0.
Pour f_0 il n'y a pas de problème.

Bilan : $\boxed{f \text{ et toutes les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } I.}$

2.) • Pour $x \in I$ et $x \neq 0$
$\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}(xln(x))^n = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-xln(x))^n}{n!}$, on reconnaît la série exponentielle (série entière de rayon de convergence $+\infty$). On a alors : $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}(xln(x))^n = exp(-xln(x)) = f(x)$

• Pour $x = 0$: $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(0) = 1 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1 = f(0)$

• On a donc : $\forall x \in I$, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) = f(x)$ et donc :

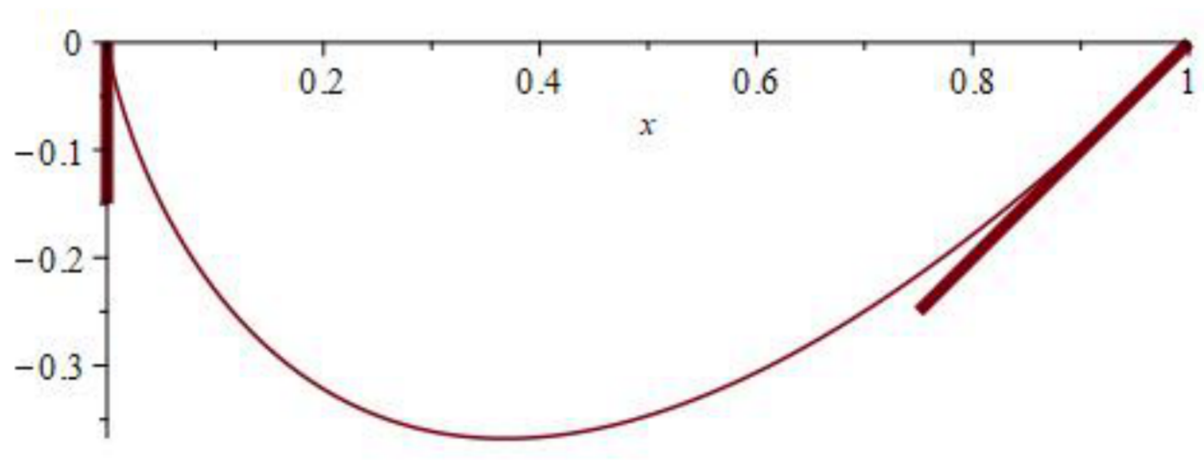
$\boxed{\text{la séries de fonctions } \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f.}$

3.) Par limite du cours, comme φ est continue en 0 alors : $\boxed{\varphi(0) = 0}$

De plus φ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $\varphi'(x) = ln(x)+1$, on a donc :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\varphi'(x)$		-		+	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	0

4.) Pour $x \in]0,1]$, $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$. φ n'est pas dérivable en 0, mais il y a une tangente verticale.
$\varphi'(1) = 1$, $\varphi(1) = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 1$ est tangente à la représentation graphique de φ au point $(1, 0)$



5.) On remarque que : $|f_n(x)| = \frac{1}{n!}\big(\varphi(x)\big)^n$
Donc, grâce au tableau de variation de φ, on a que : $\boxed{||f||_\infty = \frac{1}{e^n n!}}$

6.) Comme on reconnaît la série exponentielle on a $\sum ||f||_\infty$ qui est convergente, donc, par définition :

$\boxed{\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement sur } I}$

7.a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, étudions la convergence de $\Gamma(x)$.
Comme $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ alors, il y a éventuellement problème pour l'intégrale aux bornes 0 et $+\infty$.

• En 0 : $t^{x-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}} > 0$ donc par la règle de l'équivalent pour les intégrales de fonctions positives on a : $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ de même nature que $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ qui est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$
Donc $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$

• En $+\infty$: Par comparaison exp-puissance : $\frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$
Mais $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par négligeabilité $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Donc $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

• $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ sont convergente si et seulement si $x > 0$ donc :

$\boxed{\text{Le domaine de définition de } \Gamma \text{ est donc } D =]0, +\infty[}$

7.b) • Soit $x \in D$. Soit $\epsilon > 0$ et $A > 0$. Alors par intégration par partie :
$\int\limits_\epsilon^A t^{x-1}e^{-t}dt = [\frac{t^x}{x}e^{-t}]_\epsilon^A + \int\limits_\epsilon^A \frac{t^x}{x}e^{-t}dt$
Comme $x > 0$: $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \frac{t^x}{x}e^{-t} = 0$, de plus, par comparaison exp-puissance : $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{t^x}{x}e^{-t} = 0$. On a donc, comme x et $x + 1$ sont dans D : $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ ou encore $\boxed{\forall x \in D\ ,\ \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)}$

7.c) • $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}d = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$
• Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Gamma(n + 1) = n!$
Initialisation au rang 0 : $\Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = 1 = (0 + 1)!$ c'est bon
Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n et on la montre au rang $n + 1$.
On a donc $\Gamma(n+1) = n!$. Mais on a vu : $\Gamma((n+1)+1) = \Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$
On a donc la propriété au rang $n + 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Gamma(n + 1) = n!}$

8.) Comme $t \mapsto -ln(t)$ est une bijection de classe C^1 de $]0,1]$ dans $]0,+\infty]$, on peut effectuer dans J_n le changement de variable C^1 bijectif : $u = -ln(t) \Leftrightarrow t = e^{-u}$ (qui donne $dt = -e^{-u}du$)
Alors J_n est de même nature que :
$K_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(-ue^{-u})^n e^{-u}du = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(-1)^n u^n e^{-(n+1)u}du = \frac{1}{n!}\int\limits_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}du$

On effectue maintenant le changement de variable C^1 bijectif $v = (n+1)u$, on a K_n de même nature que :
$L_n = \frac{1}{n!}\int\limits_0^{+\infty} \frac{v^n}{(n+1)^n}e^{-v}\frac{dv}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)^n}\int\limits_0^{+\infty} v^{n+1-1}e^{-v}dv = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)^n}\Gamma(n+1)$
Comme Γ_n est convergente alors L_n, K_n et J_n sont convergentes et $J_n = K_n = L_n = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)^n}\Gamma(n+1)$
On sait que : $\Gamma(n+1) = n!$ il reste : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ ,\ J_n \text{ est convergente et } J_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}}$

9.) $J = \int\limits_0^1 f(t)dt = \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$

Comme $\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } I \\ \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement et donc uniformément vers } f \text{ sur } I \\ I \text{ est un segment} \end{cases}$ alors, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions sur un segment. On a alors : $J = \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int\limits_0^1 f_n(t)dt$

On utilise alors la question 7.) et on obtient : $J = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

Bilan, on a : $\boxed{J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}}$

Exercice 2 : fonction ζ et ζ alternée : d'après e3a PC 2017

1°) $\zeta(x)$ étant une série de Riemann, on sait, d'après le cours, qu'elle converge si et seulement si $x > 1$.
$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \zeta \text{ est donc }]1, +\infty[}$

2°) a) Comme $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $[a, +\infty[$ alors : $\boxed{||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \frac{1}{n^a}}$

2°) b) Comme $a > 1$, on a $\sum ||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sum \frac{1}{n^a}$ qui est convergente,
et donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement vers } \zeta \text{ sur } [a, +\infty[.}$

2°) c) La convergence normale impliquant la convergence uniforme, $\sum f_n$ converge uniformément vers ζ sur $[a, +\infty[$

On a : $\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } [a, +\infty[\\ \sum f_n \text{ converge uniformément vers } \zeta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n \end{cases}$

Donc par le théorème de continuité des séries de fonctions, on a : $\boxed{\zeta \text{ continue sur } [a, +\infty[}$

2°) d) Comme $\bigcup\limits_{a>1} [a, +\infty[=]1, +\infty[$, on a alors : $\boxed{\zeta \text{ est continue sur }]1, +\infty[}$

3°) a) On remarque que les fonctions f_n sont C^1 sur $]1, +\infty[$.
On a : $\forall x > 1$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = exp(-xln(n))$, donc si on dérive : $f_n'(x) = -ln(n)exp(-xln(n)) = \frac{-ln(n)}{n^x}$.

• Fixons $a > 1$
Comme $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $[a, +\infty[$, on en déduit : $||f_n'||_\infty^{[a,+\infty[} = \frac{ln(n)}{n^a}$

• Soit $b \in]1, a[$
Alors $\frac{\frac{ln(n)}{n^a}}{\frac{1}{n^b}} = \frac{ln(n)}{n^{a-b}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $a - b > 0$
On a donc $\frac{ln(n)}{n^a} = o(\frac{1}{n^b})$
Comme $b > 1$, par Riemann, $\sum \frac{1}{n^b}$ est absolument convergente, et donc, par négligeabilité, $\sum \frac{ln(n)}{n^a}$ est convergente.

On a alors : $\sum ||f_n'||_\infty^{[a,+\infty[}$ est convergente et donc $\sum f_n'$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$.

• On a donc : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [a, +\infty[\\ \sum f_n \text{ converge simplement vers } \zeta \text{ sur } [a, +\infty[\\ \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[\end{cases}$

Donc, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que ζ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et que $\forall x \in [a, +\infty[$, $\zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{-ln(n)}{n^x}$

• Comme ce résultat est valable pour tout $a > 1$ et que $I =]1, +\infty[= \bigcup\limits_{a>1} [a, +\infty[$, alors on peut passer à ζ est C^1 sur $]1, +\infty[$.

• Bilan : $\boxed{\zeta \text{ est } C^1 \text{ sur }]1, +\infty[\text{ et } \forall x \in]1, +\infty[\text{ , } \zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} = \frac{-ln(n)}{n^x}}$

4°) D'après le 3°) : $\forall x > 1$, $\zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{-ln(n)}{n^x} \leq 0$, donc $\boxed{\zeta \text{ est décroissante sur }]1,+\infty[}$

5°) a) ζ est décroissante et positive sur $]1,+\infty[$, donc, par le théorème de la limite monotone, on a : $\boxed{\zeta \text{ admet une limite finie en } +\infty}$

5°) b) On sait que : $\begin{cases} (\sum f_n) \text{ converge uniformément sur } [2,+\infty[\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1 \\ \forall n \geq 2 \ , \ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \end{cases}$

donc par le théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 + 0 = 1$

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1}$

6°) a) ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc par le théorème de la limite monotone : $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} \zeta(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\cup\{+\infty\}}$

6°) b) On pose : $\theta = \lim\limits_{x\to1^+} \zeta(x)$

Soit $A > 1$.

Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente, alors $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq A$

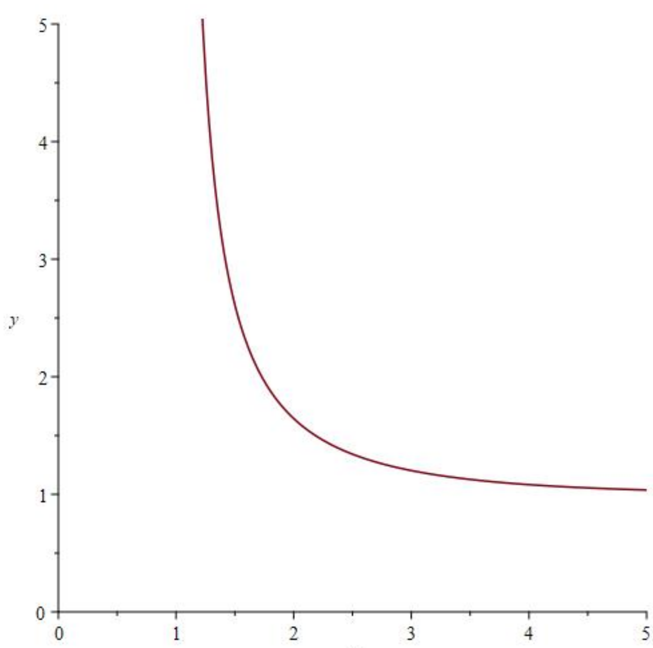
On a : $\forall x > 1$, $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^x}}_{\geq 0} \geq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$

En faisant $x \to 1^+$ on obtient : $\theta \geq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq A$

On a donc $\theta \geq A$ pour tout $A > 1$ et donc $\theta = +\infty$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} \zeta(x) = +\infty}$

7°)



8°) a) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} g_n & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{n^x} \end{array}$

Alors, pour $x > 0$, $|g_n(x)| = \frac{1}{n^x}$ donc la suite $(|g_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle. Comme la série $\sum g_n(x)$ est alternée, on peut utiliser le théorème spéciale et on en déduit : $\sum g_n(x)$ convergente.

$\boxed{F \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[}$

8°) b) Soit $a > 0$. En utilisant encore le théorème spécial on a :
$\forall x > a$, $\left|F(x) - \sum\limits_{n=1}^{N} g_n(x)\right| \leq |g_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$, alors, on a que la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{N} g_n$ vers F est uniforme sur $[a,+\infty[$.
Comme de plus, les g_n sont continue, on en déduit alors, par le théorème de continuité des séries de fonctions que : F est continue sur $[a,+\infty[$.
Comme ce résultat est vrai pour tout $a > 0$, alors : $\boxed{F \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$

8°) c) Pour $x > 1$, les deux fonctions sont définies et donc toutes les séries convergent.
$\zeta(x) + F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x}$
Mais $1 + (-1)^n = 2$ si n est pair ($n = 2k$) et $1 + (-1)^n = 0$ si n est impair.
Donc $\zeta(x) + F(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^x} = \frac{2}{2^x} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = 2^{1-x}\zeta(x)$

On a donc : $\boxed{\forall x > 1 \ , \ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)}$

8°) d) Du c) on déduit : $F(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$
Mais on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ (5°)c)), et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -1}$