PSI* 2025-2026, Mathématiques DS n°3 TYPE 2 : Correction

Questions de cours

Q1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de I dans K et f une fonction de I dans K. Alors :

• on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f si et seulement si $\forall t \in I\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$

• on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction f si et seulement si $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in I\ ,\ |f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon$

Q2) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans K. Alors :

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n' \end{cases}$$

Q3) a) Soit Ω une partie d'un espace vectoriel normé (E, N). Alors, on dit que :
Ω est un **ouvert** de (E, N) si et seulement si $\forall \omega \in \Omega\ ,\ \exists r > 0\ ,\ \mathring{B}(\omega, r) = \{x \in E\ ,\ N(x-\omega) < r\} \subset A$

Q3) b) On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ g(x, y) = y - x^2 - 1$.
On définit alors une fonction continue telle que $B = g^{-1}(]-\infty, 0[)$
Comme l'image réciproque d'un ouvert par une application continue sur $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ on en déduit que $\boxed{B \text{ est une partie ouverte de } \mathbb{R}^2}$

Q3) c) • On remarque que $\forall y > 2\ ,\ (0, y) \in A$ et comme $||(0, y)||_2 \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$
alors on a que : $\boxed{A \text{ n'est pas bornée.}}$

• On pose : $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x^2$.
Alors on remarque que : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ y > \varphi(x)\}$
On a de plus φ est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi''(x) = 2 > 0$, donc φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in A$, $(x', y') \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$.
On pose $(X, Y) = \lambda(x, y) + (1-\lambda)(x', y')$ et on a donc $X = \lambda x + (1-\lambda)x'$ et $Y = \lambda y + (1-\lambda)y'$

$\varphi(X) = \varphi(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(x')$ car φ convexe.
$< \lambda y + (1-\lambda)y'$ car $(x, y) \in A$ et $(x', y') \in A$ donc $\varphi(x) < y$ et $\varphi(x') < y'$
$= Y$ par définition de Y

On a donc $(X, Y) \in A$
On a donc : $\forall (x, y) \in A\ ,\ \forall (x', y') \in A\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda(x, y) + (1-\lambda)(x', y') \in A$

Par définition de convexité on a donc : $\boxed{A \text{ est un convexe.}}$

Exercice 1

1) • Pour $x > 0$: $f_n(x) \sim \frac{x}{n^{3/2}}$
Comme $\sum \frac{x}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann absolument convergente, alors, par équivalent $\sum f_n(x)$ est convergente.

• Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ est convergente.

• On a donc : $\forall x \in [0, +\infty[$, $\sum f_n(x)$ est convergente donc :

$\boxed{(\sum f_n) \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[}$

2) a) Soit $x \in [0, M]$ et $n \in \mathbb{N}^*$
On a : $|f_n(x)| = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \leq \frac{M}{\sqrt{n}(n+x)} \leq \frac{M}{\sqrt{n}n} = \frac{M}{n^{3/2}}$
On en déduit : $0 \leq ||f_n||_\infty^{[0,M]} \leq \frac{M}{n^{3/2}}$ avec $||f_n||_\infty^{[0,M]} = \sup_{x \in [0,M]} |f_n(x)|$
Comme $\sum \frac{1}{n^{3*2}}$ est une série de Riemann convergente alors, par comparaison : $\sum ||f_n||_\infty^{[0,M]}$ est convergente.

On en déduit, par définition, que : $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [0, M]}$

2) b) On remarque que : $f_n(n) = \frac{n}{\sqrt{n}(n+n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
Donc, si on pose : $||f_n||_\infty^{[0,+\infty[} = \sup_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x)|$, alors : $||f_n||_\infty^{[0,+\infty[} \geq f_n(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$
Comme $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ est une série divergente, alors, par comparaison : $\sum ||f_n||_\infty^{[0,+\infty[}$ est divergente et donc
$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } [0, +\infty[}$

3) a) Les f_n sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0$, $f_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(x+n)-x}{(x+n)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{(x+n)^2} = \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}$

On a alors : $|f_n'(x)| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$
Donc, si on pose : $||f_n'||_\infty^{[0,+\infty[} = \sup_{x \in [0,+\infty[} |f_n'(x)|$, alors : $0 \leq ||f_n'||_\infty^{[0,+\infty[} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$
Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, alors, par comparaison, on a : $\sum ||f_n'||_\infty^{[0,+\infty[}$ est convergente et donc $(\sum f_n')$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$

On a alors : $\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, +\infty[\\ \sum f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } [0, +\infty[\\ \sum f_n' \text{ converge normalement et donc uniformément sur } [0, +\infty[\end{cases}$
On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions et on en déduit que :
$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, +\infty[}$

3) b) La suite du théorème du a) donne : $\forall x \geq 0$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2} \geq 0$

Comme $f'(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ on en déduit : $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0, +\infty[}$

4) a)• $x_0 \geq n \geq 1$
$\Rightarrow x_0 + x_0 \geq x_0 + n > 0$
$\Rightarrow \frac{1}{x_0+n} \geq \frac{1}{2x_0} \Rightarrow \frac{x_0}{x_0+n} \geq \frac{x_0}{2x_0} = \frac{1}{2}$

• Alors $f(x_0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{x_0}{\sqrt{k}(x_0+k)}$

Comme $\frac{x_0}{\sqrt{k}(x_0+k)}\geq 0$, on peut supprimer des termes de la somme et avoir : $f(x_0)\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_0}{\sqrt{k}(x_0+k)}$

Comme $k\leq n$ alors $\frac{1}{x_0+k}\geq\frac{1}{x_0+n}$ et on a alors : $f(x_0)\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_0}{\sqrt{k}(x_0+n)}$

On utilise maintenant l'inégalité montrer au point précédent et on a : $f(x_0)\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$

• On a donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_0\in\mathbb{R}\ ,\ x_0\geq n\geq 1\ ,\ f(x_0)\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}}$

4) b) • f est croissante sur $[0,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ existe dans $[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$

Posons alors $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Avec le 4) a) Comme f est croissante, on a : $\lambda\geq f(x_0)\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \lambda\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$

Mais comme $\sum\frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série de Riemann divergente, à termes positifs : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}=+\infty$

Donc $\lambda\geq+\infty$ et donc $\lambda=+\infty$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

5) • On a pour $x>0$: $\frac{f(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(x+n)}$

On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} g_n & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{n}(x+n)}\end{array}$

Alors $\frac{f(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}g_n(x)$

• On a : $\forall x\geq 0\ ,\ 0\leq g_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}(x+n)}\leq\frac{1}{\sqrt{n}(n+0)}=\frac{1}{n^{3/2}}$

Donc, si on pose : $||g_n||_\infty^{[0,+\infty[}=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|g_n(x)|$, alors : $0\leq||g_n||_\infty^{[0,+\infty[}\leq\frac{1}{n^{3/2}}$

Comme $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, alors, par comparaison, on a : $\sum||g_n||_\infty^{[0,+\infty[}$ est convergente et donc $(\sum g_n)$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$

On a alors : $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)=0\\ \sum g_n \text{ converge uniformément sur } [0,+\infty[\end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de la double limite et on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}0=0$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$

Exercice 2 : e3A MP math 2021 Exercice 1

1.) Clairement f et les fonctions f_n sont continues sur $]0,1]$, comme produits et sommes de fonctions continues. Il reste à voir la continuité en 0.

Pour $x \in]0,1]$, $f(x) = x^{-x} = exp(-xln(x))$, mais on sait d'après le cours que $xln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, par continuité de exp en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = exp(0) = 1 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.
Grâce à cette limite du cours, on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0 = f_n(0)$ donc f_n est continue en 0.
Pour f_0 il n'y a pas de problème.

Bilan : $\boxed{f \text{ et toutes les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } I.}$

2.) • Pour $x \in I$ et $x \neq 0$
$\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}(xln(x))^n = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-xln(x))^n}{n!}$, on reconnaît la série exponentielle (série entière de rayon de convergence $+\infty$). On a alors : $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}(xln(x))^n = exp(-xln(x)) = f(x)$

• Pour $x = 0$: $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(0) = 1 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1 = f(0)$

• On a donc : $\forall x \in I$, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) = f(x)$ et donc :

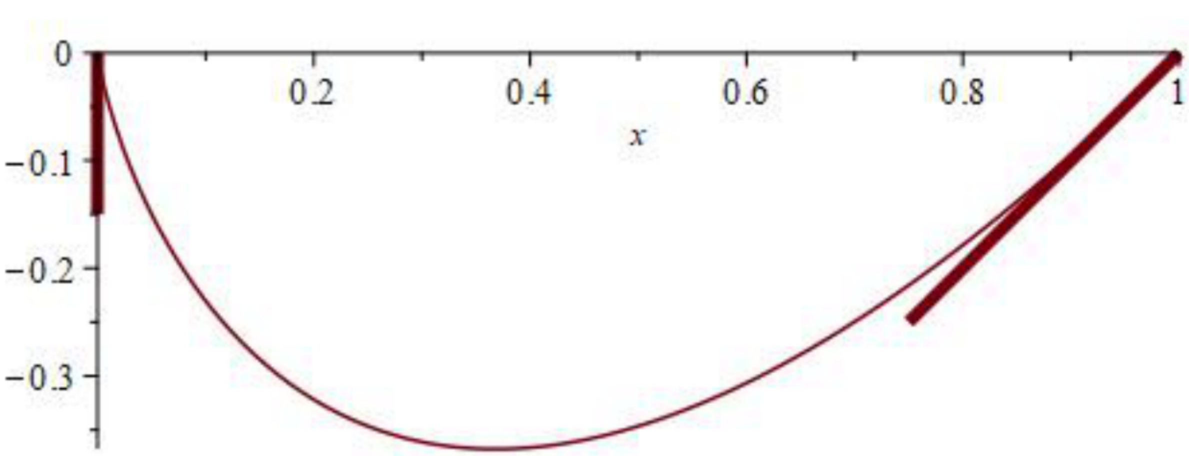
$\boxed{\text{la séries de fonctions } \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f.}$

3.) Par limite du cours, φ est prolongeable par continuité en 0.
On notera encore φ ce prolongement obtenu en posant $\varphi(0) = 0$

De plus φ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $\varphi'(x) = ln(x)+1$, on a donc :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\varphi'(x)$		-		+	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	0

4.) Pour $x \in]0,1]$, $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$. φ n'est pas dérivable en 0, mais il y a une tangente verticale.
$\varphi'(1) = 1$, $\varphi(1) = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 1$ est tangente à la représentation graphique de φ au point $(1,0)$



5.) $|f_n(x)| = \frac{1}{n!}\big(\varphi(x)\big)^n$

Donc, grâce au tableau de variation de φ, on remarque que : $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in I}|f(t)| = \frac{1}{e^n n!}$

Comme on reconnaît la série exponentielle on a $\sum ||f||_\infty$ qui est convergente, donc, par définition :

$\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement sur } I}$

6.a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, étudions la convergence de $\Gamma(x)$.

Comme $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ alors, il y a éventuellement problème pour l'intégrale aux bornes 0 et $+\infty$.

• En 0 : $t^{x-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}} > 0$ donc par la règle de l'équivalent pour les intégrales de fonctions positives on a : $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ de même nature que $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ qui est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$

Donc $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$

• En $+\infty$: Par comparaison exp-puissance : $\frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$

Mais $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par négligeabilité $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

• $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ sont convergente si et seulement si $x > 0$ donc :

$\boxed{\text{Le domaine de définition de } \Gamma \text{ est donc } D =]0, +\infty[}$

6.b) • Soit $x \in D$. Soit $\epsilon > 0$ et $A > 0$. Alors par intégration par partie :

$\int\limits_\epsilon^A t^{x-1}e^{-t}dt = [\frac{t^x}{x}e^{-t}]_\epsilon^A + \int\limits_\epsilon^A \frac{t^x}{x}e^{-t}dt$

Comme $x > 0$: $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \frac{t^x}{x}e^{-t} = 0$, de plus, par comparaison exp-puissance : $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{t^x}{x}e^{-t} = 0$. On a donc, comme x et $x + 1$ sont dans D : $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ ou encore $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

• $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}d = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$

• Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Gamma(n + 1) = n!$

Initialisation au rang 0 : $\Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = 1 = (0 + 1)!$ c'est bon

Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n et on la montre au rang $n + 1$.

On a donc $\Gamma(n+1) = n!$. Mais on a vu : $\Gamma((n+1)+1) = \Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$

On a donc la propriété au rang $n + 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Gamma(n + 1) = n!}$

7.) Comme $t \mapsto -ln(t)$ est une bijection de classe C^1 de $]0,1]$ dans $]0,+\infty]$, on peut effectuer dans J_n le changement de variable C^1 bijectif : $u = -ln(t) \Leftrightarrow t = e^{-u}$ (qui donne $dt = -e^{-u}du$)
Alors J_n est de même nature que :

$$K_n = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(-ue^{-u})^n e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(-1)^n u^n e^{-(n+1)u} du = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u} du$$

On effectue maintenant le changement de variable C^1 bijectif $v = (n+1)u$, on a K_n de même nature que : $L_n = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{v^n}{(n+1)^n} e^{-v} \frac{dv}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)^n}\int_0^{+\infty} v^{n+1-1}e^{-v}dv = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)^n}\Gamma(n+1)$
Comme Γ_n est convergente alors L_n, K_n et J_n sont convergentes et $J_n = K_n = L_n = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)^n}\Gamma(n+1)$
On sait que : $\Gamma(n+1) = n!$ il reste : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } J_n \text{ est convergente et } J_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}}$

8.) $J = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$

Comme $\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } I \\ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement et donc uniformément vers } f \text{ sur } I \\ I \text{ est un segment} \end{cases}$ alors, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions sur un segment. On a alors : $J = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$

On utilise alors la question 7.) et on obtient : $J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$

Bilan, on a : $\boxed{J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}}$

9.) $\left| J - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^n} \right| = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{(n_0+1)^n} = \frac{1}{(n_0+1)^{n_0+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{n_0+1}} = \frac{1}{(n_0+1)^{n_0+1}}\frac{n_0+1}{n_0} = \frac{1}{n_0(n_0+1)^{n_0}}$

$\sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n^n}$ est une valeur approchée de J à 10^{-6} de manière certaine, mais on peut sans doutes faire mieux !!!
Mais l'énoncé ne demande pas le meilleure n_0 possible.

En fait $n_0 = 7$ convient aussi (de manière moins évident), maist on peut-être faire mieux, avec une meilleure majoration que ci-dessus...

Exercice 3 : fonction ζ et ζ alternée : d'après e3a PC 2017

1°) $\zeta(x)$ étant une série de Riemann, on sait, d'après le cours, qu'elle converge si et seulement si $x > 1$.
$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \zeta \text{ est donc }]1, +\infty[}$

2°) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{x \geq a} |f_n(x)|$

Comme $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ alors : $||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \frac{1}{n^a}$
Comme $a > 1$, on a $\sum ||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sum \frac{1}{n^a}$ qui est convergente, et donc $\sum f_n$ converge normalement vers ζ sur $[a, +\infty[$.
La convergence normale impliquant la convergence uniforme, $\sum f_n$ converge uniformément vers ζ sur $[a, +\infty[$

On a : $\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } [a, +\infty[\\ \sum f_n \text{ converge uniformément vers } \zeta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n \end{cases}$

Donc par le théorème de continuité des séries de fonctions, on a : $\boxed{\zeta \text{ continue sur } [a, +\infty[}$

Comme $\bigcup\limits_{a>1} [a, +\infty[=]1, +\infty[$, on a alors : $\boxed{\zeta \text{ est continue sur }]1, +\infty[}$

3°) a) On remarque que les fonctions f_n sont C^∞ sur $]1, +\infty[$ et qu'on peut donc les dériver indéfiniment.
Montrons alors, par récurrence sur k, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]1, +\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-ln(n))^k}{n^x}$

Initialisation :
$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = exp(-xln(n))$, donc si on dérive : $f'_n(x) = f_n^{(1)}(x) = -ln(n)exp(-xln(n)) = \frac{-ln(n)}{n^x}$.
On a donc bien le résultat au rang $k = 1$.

Hérédité : On suppose le résultat au rang k: $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-ln(n))^k}{n^x}$
Alors : $f_n^{(k+1)}(x) = (f_n^{(k)}(x))' = (-ln(n))^k(-ln(n))\frac{1}{n^x} = \frac{(-ln(n))^{k+1}}{n^x}$
On a bien le résultat au rang $k + 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ , } \forall x \in]1, +\infty[\text{ , } f_n^{(k)}(x) = \frac{(-ln(n))^k}{n^x}}$

3°) b) • Fixons $a > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$ et prenons $b \in]1, a[$.

Alors : $\forall i \in [\![0; k-1]\!]$, $\forall x \in [a, +\infty[$, $\left| \frac{f_n^{(i)}(x)}{\frac{1}{n^b}} \right| = \frac{(ln(n))^i}{n^{x-b}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $x - b > 0$ puisque $x > a$ et $b < a$ et par comparaison exp-puissance.
On en déduit $f_n^{(i)}(x) = o(\frac{1}{n^b})$.
Mais $b > 1$ et $\sum \frac{1}{n^b}$ est une série à termes positifs convergente d'après Riemann.
Par négligeabilité on en déduit donc que $\sum f_n^{(i)}(x)$ est convergente.
On a donc démontré la convergence simple sur $[a, +\infty[$ des $\sum f_n^{(i)}$ pour $i \in [\![0; k-1]\!]$.

• Pour $x \in [a, +\infty[$ on a : $0 \leq \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{(ln(n))^k}{n^a}$ car $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$

On en déduit : $\left|\left| f_n^{(k)} \right|\right|_\infty^{[a,+\infty[} \leq \frac{(ln(n))^k}{n^a}$

On a vu ci-dessus que $\sum \frac{(ln(n))^k}{n^a}$ était convergente, donc par comparaison $\sum \left|\left| f_n^{(k)} \right|\right|_\infty^{[a,+\infty[}$ est convergente et $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$.

• On a donc : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } [a,+\infty[\\ \forall i \in \llbracket 0;k-1 \rrbracket \;,\; \sum f^{(i)} \text{ converge simplement sur } [a,+\infty[\\ \sum f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[\end{cases}$

Par la généralisation du théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que ζ est de classe C^k sur $[a,+\infty[$ et que $\forall i \in \llbracket 0;k \rrbracket \;,\; \forall x \in [a,+\infty[\;,\; \zeta^{(i)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(i)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-ln(n))^i}{n^x}$

• Comme ce résultat est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors on peut passer à ζ est C^∞ sur $[a,+\infty[$.

• Comme ce résultat est valable pour tout $a > 1$ et que $I =]1,+\infty[= \bigcup\limits_{a>1} [a,+\infty[$, alors on peut passer à ζ est C^∞ sur $]1,+\infty[$.

• Bilan : $\boxed{\zeta \text{ est } C^\infty \text{ sur }]1,+\infty[\text{ et } \forall k \in \mathbb{N} \;,\; \forall x \in]1,+\infty[\;,\; \zeta^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} = \frac{(-ln(n))^k}{n^x}}$

4°) D'après le 3°)b) : $\forall x > 1 \;,\; \zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{-ln(n)}{n^x} \leq 0$, donc $\boxed{\zeta \text{ est décroissante sur }]1,+\infty[}$

5°) a) ζ est décroissante et positive sur $]1,+\infty[$, donc, par le théorème de la limite monotone, on a : $\boxed{\zeta \text{ admet une limite finie en } +\infty}$

5°) b) • $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{\geq 0} \geq 1$, donc $\zeta(x) \geq 1$

• $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Mais, pour $x \geq 2$, on a : $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$, donc en utilisant cette inégalité dans la deuxième somme :

$\zeta(x) \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Bilan : $\boxed{\forall x \geq 2 \;,\; \forall N \in \mathbb{N}^* \;,\; 1 \leq \zeta(x) \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$

5°) c) Notons $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x)$. (existe d'après le a))

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est le reste d'une série convergente alors $\exists N \in \mathbb{N}^* \;,\; 0 \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$

En reportant dans l'inégalité du b) : $1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} + \varepsilon$

N étant fixé, on fait tendre x vers $+\infty$, et comme $\frac{1}{n^x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (puisque $n > 1$, c'est pour çà que l'on a séparé le cas $n = 1$) on en déduit : $1 \leq \lambda \leq 1 + \varepsilon$

On utilise aussi que la somme est finie.

Comme ce résultat est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ alors $\lambda = 1$

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1}$

6°) $t \mapsto \frac{1}{t^{1+h}}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc : $\forall t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{(n+1)^{1+h}} \leq \frac{1}{t^{1+h}} \leq \frac{1}{n^{1+h}}$

On intègre sur $[n, n+1]$: $\frac{1}{(n+1)^{1+h}} \leq \int\limits_{n}^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \frac{1}{n^{1+h}}$

On somme, pour n variant de $n=1$ à N :

$\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^{1+h}} \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+h}}$

Relation de Chasles et changement d'indice dans la première somme :

$\sum\limits_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^{1+h}} \leq \int\limits_{1}^{N+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+h}}$

Comme l'intégrale est convergente $(1+h > 1)$ et que les séries convergent, en faisant tendre N vers $+\infty$:

$\zeta(1+h) - 1 \leq \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \zeta(1+h)$

En calculant l'intégrale :

$\zeta(1+h) - 1 \leq [\frac{1}{-1-h+1} t^{-1-h+1}]_1^{+\infty} \leq \zeta(1+h)$

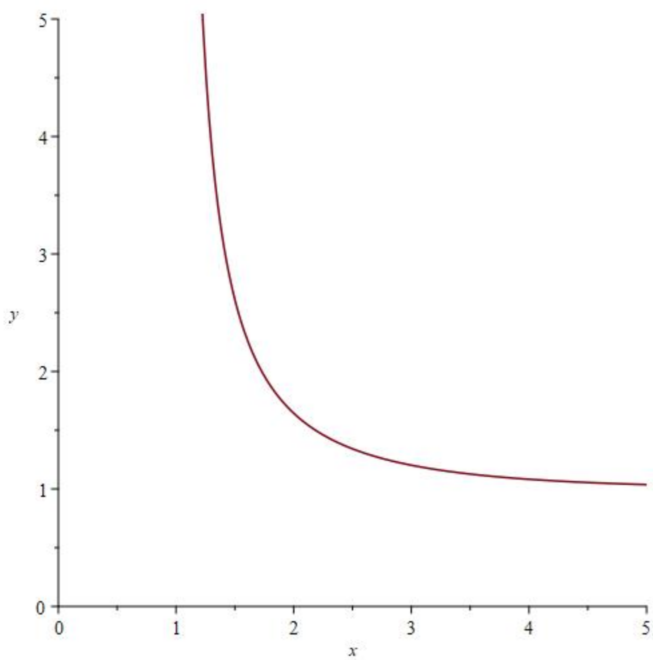
$\Rightarrow \zeta(1+h) - 1 \leq \frac{1}{h} \leq \zeta(1+h)$

$\Rightarrow \frac{1}{h} \leq \zeta(1+h) \leq \frac{1}{h} + 1$

$\Rightarrow 1 \leq h\zeta(1+h) \leq 1+h$

Donc, par encadrement $h\zeta(1+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1$ et donc, pour h au voisinage de 0 : $\zeta(1+h) \sim \frac{1}{h}$

$\boxed{\text{Pour } x \text{ au voisinage de } x=1 : \zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}}$



7°)

8°) a) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} g_n & : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{n^x} \end{array}$

Alors, pour $x > 0$, $|g_n(x)| = \frac{1}{n^x}$ donc la suite $(|g_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle. Comme la série $\sum g_n(x)$ est alternée, on peut utiliser le théorème spéciale et on en déduit : $\sum g_n(x)$ convergente.

$\boxed{F \text{ est bien définie sur }]0, +\infty[}$

8°) b) Soit $a > 0$. En utilisant encore le théorème spécial on a :

$\forall x > a$, $\left|F(x) - \sum\limits_{n=1}^{N} g_n(x)\right| \leq |g_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$, alors, on a que la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{N} g_n$ vers F est uniforme sur $[a, +\infty[$.
Comme de plus, les g_n sont continue, on en déduit alors, par le théorème de continuité des séries de fonctions que : F est continue sur $[a, +\infty[$.
Comme ce résultat est vrai pour tout $a > 0$, alors : $\boxed{F \text{ est continue sur }]0, +\infty[}$

8°) c) Pour $x > 1$, les deux fonctions sont définies et donc toutes les séries convergent.

$\zeta(x) + F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x}$

Mais $1 + (-1)^n = 2$ si n est pair $(n = 2k)$ et $1 + (-1)^n = 0$ si n est impair.

Donc $\zeta(x) + F(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^x} = \frac{2}{2^x} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = 2^{1-x}\zeta(x)$

On a donc : $\boxed{\forall x > 1 \text{ , } \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)}$

8°) d) Du c) on déduit : $F(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$
Mais on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ (5°)c)), et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -1}$