

Chapitre 11 : Séries de fonctions, exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 11.1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$ et on considère la série de fonctions

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence normale de $\sum u_n$

Correction

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

On a donc $\|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente on a alors par la règle de comparaison que $\sum \|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$ est convergente.

D'après le cours : la série de fonctions $\sum u_n$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément et simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Enoncé, Exercice 11.2

On pose : $I = [0, +\infty[$ et $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (-1)^n x e^{-nx^2}$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur I .

b) La convergence de $\sum f_n$ est-elle normale sur I ?

c) La convergence est-elle uniforme sur I ?

Correction

a) Pour x fixé dans I on a : $n^2 f_n(x) = (-1)^n n^2 x e^{-nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $f_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et à termes positifs, alors, par négligeabilité, on a $\sum f_n(x)$ qui est convergente.

$\sum f_n$ est donc une série de fonctions simplement convergente sur I .

b) Fixons $n > 0$ et étudions $F_n = |f_n|$ sur I . On a : $\forall x \in I$, $F_n(x) = xe^{-nx^2}$
 F_n est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F_n(x) = e^{-nx^2} - 2nx^2e^{-nx^2} = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2n}}$	$+\infty$
$F'_n(x)$	+	0	-
F_n	0	a_n	0

avec $a_n = F_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \exp(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2en}}$

On en déduit que $\|f_n\|_{I,\infty} = \frac{1}{\sqrt{2en}}$

Comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente alors $\sum \|f_n\|_{I,\infty}$ est divergente et donc

$\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I

c) On pose $\forall x \in I$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ le reste de la série de fonctions.

Comme, à x fixé, $|f_n(x)| = xe^{-nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées et on obtient : $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e(n+1)}}$ en utilisant l'étude du b). On a donc $\|R_n\|_{I,\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2e(n+1)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I

Enoncé, Exercice 11.3

Pour $x > 0$ on pose : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

- Montrer que S est bien définie et est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
- Préciser le sens de variation de S .
- Montrer que : $\forall x > 0$, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$
- Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0^+
- Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$

Correction

a) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$

On a alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et on étudie la série de fonctions $\sum u_n$.

Pour $x > 0$ fixé, on a $\sum u_n(x)$ est une série alternée, avec $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante. On peut donc appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées, on en déduit que $\sum u_n(x)$ est convergente et donc que S est définie sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$

On a de manière directe : $\|u'_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann) alors $\sum \|u'_n\|_\infty^{[a, +\infty[}$ est convergente et donc $\sum u'_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $]0, +\infty[$

On a donc : $\begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\\ \sum u_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur }]0, +\infty[\\ \sum u'_n \text{ converge uniformément sur }]0, +\infty[\end{cases}$ donc par le théorème de dérivation des

séries de fonctions, on a : S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$

S est bien définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

b) Pour x fixé, on a $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ qui est une série alternée.

Comme $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $(\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \right|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées, on retrouve que $\sum u'_n(x)$ est convergente mais surtout que $S'(x)$ est du signe de $u'_0(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$

On en déduit que $\forall x > 0$, $S'(x) < 0$ et donc que S est décroissante sur $]0; +\infty[$

c) Soit $x > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} & S(x+1) + S(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(x+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ changement d'indice } k = n+1 \text{ dans la première somme, } k = n \text{ dans la seconde} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \\ &= - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On a donc : $\forall x > 0$, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$

d) D'après c) on a : $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ et comme S est continue en 1 on a $S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(1) \in \mathbb{R}$
Comme de plus $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

On en déduit $S(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+

Remarque : on a même $S(x) = \frac{1}{x} - S(1) + o(1)$ et comme $S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

On a au voisinage de 0^+ on a : $S(x) = \frac{1}{x} - \ln(2) + o(1)$

e) S est décroissante donc $S(x-1) \geq S(x) \geq S(x+1)$, on ajoute $S(x)$ et on a :

$$S(x-1) + S(x) \geq 2S(x) \geq S(x) + S(x+1)$$

On utilise le c) et on obtient : $\frac{1}{x-1} \geq 2S(x) \geq \frac{1}{x}$ et donc $\frac{x}{x-1} \geq 2xS(x) \geq 1$

Par encadrement on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xS(x) = 1$ et on en déduit : $S(x) \sim \frac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$

Enoncé, Exercice 11.4

Pour $x \in I =]1, +\infty[$ on pose : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est de classe C^∞ sur I .

Correction

- Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{array}{ccc} f_n & : & I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{n^x} \end{array}$$

On a alors : $\forall x \in I$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

- $\forall x \in I$, $f_n(x) = \exp(-x \ln(n))$, on en déduit donc que f_n est C^∞ sur I .

Par une récurrence simple on montrera que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $f_n^{(i)}(x) = (-\ln(n))^i \exp(-x \ln(n)) = \frac{(-\ln(n))^i}{n^x}$

- Fixons $a > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$ et prenons $b \in]1, a[$.

Alors : $\forall i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $\forall x \in [a, +\infty[$, $\left| \frac{f_n^{(i)}(x)}{\frac{1}{n^b}} \right| = \frac{(\ln(n))^i}{n^{x-b}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $x-b > 0$ puisque $x > a$ et $b < a$

Par comparaison exp-puissance, on en déduit $f_n^{(i)}(x) = o(\frac{1}{n^b})$.

Mais $b > 1$ et $\sum \frac{1}{n^b}$ est une série à termes positifs convergente d'après Riemann.

Par négligeabilité on en déduit donc que $\sum f_n^{(i)}(x)$ est convergente.

On a donc démontré la convergence simple sur $[a, +\infty[$ des $\sum f_n^{(i)}$ pour $i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$.

- Pour $x \in [a, +\infty[$ on a : $0 \leq \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ car $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$

On en déduit : $\left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty^{[a, +\infty[} = \sup_{t \in [a, +\infty[} \left| f_n^{(k)}(t) \right| \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$

On a vu ci-dessus que $\sum \frac{1}{(\ln(n))^k n^a}$ était convergente, donc par comparaison $\sum \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty^{[a, +\infty[}$ est convergente et $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$.

- On a donc :
$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } [a, +\infty[\\ \forall i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket, \sum f_n^{(i)} \text{ converge simplement sur } [a, +\infty[\\ \sum f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[\end{cases}$$

Par la généralisation du théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que ζ est de classe C^k sur $[a, +\infty[$ et que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $\forall x \in [a, +\infty[$, $\zeta^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^i}{n^x}$

- Comme ce résultat est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors on peut passer à ζ est C^∞ sur $[a, +\infty[$.

• Comme ce résultat est valable pour tout $a > 1$ et que $I =]1, +\infty[= \bigcup_{a>1} [a, +\infty[$, alors on peut passer à ζ est C^∞ sur I .

- Bilan :
$$\boxed{\zeta \text{ est } C^\infty \text{ sur } I \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \zeta^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^i}{n^x}}$$