Chapitre 12 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 12.1

Calculer le rayon de convergence de $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n+n^2}{exp(n+\frac{1}{n})} z^n$

Correction

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{e^n+n^2}{exp(n+\frac{1}{n})}$

$a_n = \frac{e^n+n^2}{e^n exp(\frac{1}{n})} \sim \frac{e^n}{e^n} = 1$

Donc $|a_n| \sim 1$ et comme on sait que $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 alors par la règle de l'équivalent pour les séries entières $\boxed{S(z) \text{ a pour rayon de convergence 1.}}$

Enoncé, Exercice 12.2

Calculer le rayon de convergence de $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n+n}{exp(n+1)} z^{2n+1}$

Correction

Soit $z \neq 0$, alors on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(z) = \frac{9^n+n}{exp(n+1)} z^{2n+1}$

On a $u_n(z) \neq 0$. Alors : $u_n(z) \sim \frac{9^n}{exp(n+1)} z^{2n+1}$

$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \sim \left|\frac{\frac{9^{n+1}}{exp(n+2)} z^2}{\frac{9^n}{exp(n+1)}}\right| \sim \left|\frac{9z^2}{e}\right| \qquad \text{donc } \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{9|z^2|}{e}$

$\frac{9|z^2|}{e} = 1 \Leftrightarrow |z^2| = \frac{e}{9} \Leftrightarrow |z| = \frac{\sqrt{e}}{3}$

On va utiliser deux fois la règle de D'Alembert :

cas 1 : $|z| < \frac{\sqrt{e}}{3} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| < 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{D'Alembert}} \sum u_n(z)$ est convergente.

cas 2 : $|z| > \frac{\sqrt{e}}{3} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| > 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{D'Alembert}} \sum u_n(z)$ est divergente.

Comme par définition, le rayon de convergence de $S(z)$ vaut :

$R = Max(\{|z| \ , \ z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum u_n(z) \text{ convergente } \})$, on en déduit que:

$\boxed{\text{le rayon de convergence de } S(z) \text{ vaut } \frac{\sqrt{e}}{3}}$

Enoncé, Exercice 12.3

On considère la série entière $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1}$
Déterminer la rayon de convergence R de S et calculer S sur son intervalle ouvert de convergence

Correction

Par comparaison exponentielle-puissance on a : $(n^2x^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow |x| < 1$.
Comme $R = Max(\{|x| \ , x \in \mathbb{R} \text{ et } (n^2x^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \})$ alors on en déduit $R = 1$

On va partir du résultat que l'on connaît sur la série géométrique et utiliser le fait que l'on peut dériver (deux fois) terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. On a alors :

$\forall x \in]-1;1[\ , \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[\ , \ \frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[\ , \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[\ , \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et de même, en redérivant

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[\ , \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Alors : $\forall x \in]-1;1[$, puisque toutes les séries considérées convergent :

$S(x)$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n((n-1)+1)x^{n+1}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$

$= x^3 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x^2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$

$= x^3 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$

On utilise les sommes calculées ci-dessus :

$S(x) = x^3 \frac{2}{(1-x)^3} + x^2 \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^3 + x^2(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$

Bilan :

$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } S \text{ vaut } R = 1 \text{ et } \forall x \in]-1;1[\ , \ S(x) = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}}$

Enoncé, Exercice 12.4

Montrer que $f(x) = arctan(2x)$ est développable en série entière en 0 et donner ce développement.

Correction

f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$
On va commencer par faire le développement en série entière de f'
On sait que $\forall X \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n X^n = \frac{1}{1+X}$

On en déduit $\forall x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$, $(2x)^2 \in]-1;1[$ et donc
$f'(x) = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n ((2x)^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}$

On peut intégrer une série entière terme à terme sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence, on a donc :
$\forall x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + f(0)$
Mais $f(0) = 0$ et donc :

$\boxed{f \text{ est développable en série entière en 0 et } \forall x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[\text{ , } f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}}$

Enoncé, Exercice 12.5

Déterminer les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle:

$$E \Leftrightarrow xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0$$

Correction

Supposons que $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$ et soit une solution de E sur $]-R;R[$

Comme on peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence alors : $\forall x \in]-R;R[\ ,\ \begin{cases} y'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$

On a alors :

y solution de E sur $]-R;R[$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\quad xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\quad x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 4 a_n x^{n+1} = 0$

$\Leftrightarrow (1)$

Changement d'indice : $p-1 = n+1 \Leftrightarrow p = n+2$ dans la dernière somme et $p = n$ dans les deux premières.

$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\ \sum\limits_{p=0}^{+\infty} p(p-1) a_p x^{p-1} + \sum\limits_{p=0}^{+\infty} 2p a_p x^{p-1} + \sum\limits_{p=2}^{+\infty} 4 a_{p-2} x^{p-1} = 0$

On fait commencer les sommes au même indice :

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\ 0 + 0 + \sum_{p=2}^{+\infty} p(p-1) a_p x^{p-1} + 0 + 2a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} 2p a_p x^{p-1} + \sum_{p=2}^{+\infty} 4 a_{p-2} x^{p-1} = 0$$

On regroupe les sommes car elles convergent

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\ 2a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} [p(p-1) a_p + 2p a_p + 4 a_{p-2}] x^{p-1} = 0$$

Par unicité du DSE_0, puisque $R > 0$

$(1) \Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2\ \ p(p-1) a_p + 2p a_p + 4 a_{p-2} = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2\ \ p(p+1) a_p + 4 a_{p-2} = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2\ \ a_p = \frac{-4}{p(p+1)} a_{p-2}$

Recherche : $a_2 = \frac{-4}{2\times 3} a_0 \qquad a_4 = \frac{-4}{4\times 5} a_2 = \frac{4^2}{2\times 3\times 4\times 5} a_0$

$a_{2n} = \frac{-4}{(2n+1)\times(2n)} a_{2n-2} = \frac{-4}{(2n+1)\times(2n)} \cdots \frac{4^2}{2\times 3\times 4\times 5} a_0$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} a_0 \end{cases}$

Au rang 0 : On a déjà montrer que $a_1 = 0$ et on a bien $a_0 = a_0$

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n et on la montre au rang $n+1$

$a_{2n+3} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+4)} a_{2n+1} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+4)} \times 0 = 0$

$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+2)} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} a_0 = \frac{(-4)^{n+1}}{(2n+3)!} a_0 = \frac{(-4)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} a_0$

On a donc bien le résultat au rang $n+1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} a_0 \end{cases}$

On a donc $y(x) = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n+1)!}$

Or on sait que $\forall X \in \mathbb{R}$, $sin(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n X^{2n+1}}{(2n+1)!}$

On en déduit que y est de rayon de convergence $+\infty$ et que $2xy(x) = a_0 sin(2x)$

On a alors : $y(x) = \begin{cases} a_0 \frac{sin(2x)}{2x} \text{ si } x \neq 0 \\ a_0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Comme, on a raisonné par équivalences et que $R > 0$ on sait peut remonter les équivalences.

Conclusion :

Les solutions développables en séries entières en 0 de E, sont définies sur $\mathbb{R}$ et s'écrivent :

$$y(x) = \begin{cases} a_0 \frac{sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R}$$

Enoncé, Exercice 12.6

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) = \begin{cases} \frac{ch(x^2)-1}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

1°) Quelle valeur donner à λ pour que f soit continue en 0 ?

2°) On suppose que λ prend la valeur donnée au 1°).
Montrer alors que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction

1°) Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 :
$f(x) = \frac{ch(x^2)-1}{x^4} = \frac{(1+\frac{x^4}{2}+o(x^4))-1}{x^4} = \frac{1}{2} + o(1)$
Si on pose $\lambda = \frac{1}{2}$ alors on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$
Il faut donc donner à λ la valeur $\frac{1}{2}$ pour que f soit continue en 0.

2°) On sait d'après le cours que : $\forall X \in \mathbb{R}$, $ch(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{X^{2n}}{(2n)!}$
On a alors pour $x \neq 0$ (en posant $X = x^2$) :
$f(x) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} - 1}{x^4} = \frac{1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!} - 1}{x^4} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-4}}{(2n)!} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+2)!} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+2)!}$
On remarque que la relation ci-dessus est valable sur $\mathbb{R}$, y compris en $x = 0$ à cause de la valeur choisie pour λ
On a donc f développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a donc :
$\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$