# Chapitre 13 : Eléments propres

Dans ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

## 1 Eléments propres pour un endomorphisme

Dans ce paragraphe : $E$ désigne un $K$ espace vectoriel de dimension quelconque.

### 1.1 Introduction : droite stable

Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $D$ une droite stable de $E$.
Alors on peut écrire $D = Vect(x)$ avec $x \neq 0_E$
$D$ stable par $u$ donne $u(x) \in D$ et donc $\exists \lambda \in K\ ,\ u(x) = \lambda x$

Réciproquement si il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$ alors $D = Vect(x)$ est stable par $u$.

On a donc :

**Lemme.** *(Préliminaire)*
*Soit $u \in L(E)$ et $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ : $Vect(x)$ stable par $u \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in K\ ,\ u(x) = \lambda x$*

**Remarque.** *On sera donc amené à considéré l'équation*
$\boxed{u(x) = \lambda x}$ *et à poser les définitions du paragraphe suivant.*

### 1.2 Valeur et vecteur propre

**Définitions.** *Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme de $E$. Alors, on dit que :*

- *$\lambda \in K$ est une valeur propre de $u$ si et seulement si $\exists x \in E$ tel que* $\begin{cases} u(x) = \lambda x \\ x \neq \overrightarrow{0_E} \end{cases}$
- *$x \in E$ est un vecteur propre de $u$ si et seulement si $\exists \lambda \in K$ tel que* $\begin{cases} u(x) = \lambda x \\ x \neq \overrightarrow{0_E} \end{cases}$

**Remarques.** *Attention un* **vecteur propre n'est jamais nul.**
*Par contre $0$ peut très bien être valeur propre de $u$.*
*La relation a retenir est $u(x) = \lambda x$ (appelée "équation aux éléments propres").*
*Si on a cette relation et que $x \neq \overrightarrow{0_E}$ alors on dit que $x$ et $\lambda$ sont valeur et vecteur propre associés.*

### 1.3 Autres éléments propres

**Définitions.** *Soit $u \in L(E)$. Alors on note $sp(u)$ et on appelle* **spectre de u** *l'ensemble des valeurs propres de $u$.*
*Pour $\lambda \in sp(u)$ on pose $E_\lambda(u) = ker(u - \lambda Id_E)$.*
*$E_\lambda(u)$ est appelé* **sous espace propre** *de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$.*

### 1.4 Propriétés immédiates

#### 1.4.1 Structure

**Lemme.** *Avec les notations précédents : $E_\lambda$ est un sous espace vectoriel de $E$*

**Remarque.** *$E_\lambda$ est l'ensemble des vecteurs propres de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$ auquel on rajoute le vecteur nul.*

#### 1.4.2 Valeur propre 0 et noyau

**Lemme.** *Avec les notations précédents, si 0 est valeur propre alors le sous espace propre associé est $ker(u)$*
*On a donc $u$* **injective** $\Leftrightarrow 0 \notin sp(u)$

preuve :

### 1.4.3 Intérêt

**Lemme.** *Si $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ est une base de vecteurs propres de $u$ alors $M_B(u)$ est une matrice* **diagonale.**

preuve :

### 1.4.4 Exemple

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f \in L(E)$ défini par $f(P) = X^2 P''$.

## 1.5 Caractérisation des valeurs propres

**Lemme.** *Soit $u \in L(E)$. Alors : $\lambda \in sp(u)$*
$\Leftrightarrow \exists x \in E$ *tel que :* $x \neq \overrightarrow{0_E}$ *et* $u(x) = \lambda x$
$\Leftrightarrow ker(u - \lambda Id_E) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$
$\Leftrightarrow u - \lambda Id_E$ *n'est pas injectif*

**Remarque.** *Si de plus $E$ est de dimension finie alors :*
$\lambda \in sp(u)$
$\Leftrightarrow u - \lambda Id_E$ *n'est pas surjectif*
$\Leftrightarrow u - \lambda Id_E$ *n'est pas bijectif*
$\Leftrightarrow rg(u - \lambda Id_E) \neq dim(E) \Leftrightarrow det(u - \lambda Id_E) = 0$
*Cette dernière caractérisation est la plus pratique, on la développera au paragraphe suivant puisque l'on travaillera surtout en dimension finie.*

## 1.6 Théorèmes importants

### 1.6.1 Somme directe

**Théorème . Une somme finie de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.**

**Corollaire. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.**

preuve :

### 1.6.2 Valeur propre et polynôme

**Théorème .** *Soit $u \in L(E)$ , $\lambda \in sp(u)$ et $x \in E_\lambda$ un vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$*

$$\text{Alors : } \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} \ , \ \mathbf{u^k(x) = \lambda^k x} \\ \forall P \in K[X] \ , \ \mathbf{P(u)(x) = P(\lambda) x} \\ \text{Si } \lambda \text{ est valeur propre de } u \\ \ \text{alors } P(\lambda) \text{ est valeur propre de } P(u) \end{cases}$$

**Corollaire. Si $P$ est polynôme annulateur de $u$ alors le spectre de $u$ est inclus dans l'ensemble des racines de $P$.**

preuve :

**Exemple.** *Si $u$ est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{L(E)}$) alors $0$ est la seule valeur propre de $u$.*

## 1.7 Stabilité

**Lemme.** *Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in K$ alors $E_\lambda$* **est stable par $u$.**

preuve :

**Lemme.** *Soit $(u, v) \in L(E)^2$ tel que $u$ et $v$ commutent.*
*Alors* **les sous espaces propres de $u$ sont stables par $v$.**

preuve

# 2 Cas particulier de la dimension finie : Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe $E$ **est dimension finie.** et on pose $n = dim(E)$.

## 2.1 Définition

**Définition.** *Soit* $u \in L(E)$. *Alors on pose*
$\chi_u(X) = det(XId_E - u)$**.**
$\chi_u$ *est appelé polynôme caractéristique de* $u$.

**Remarque.** *On remarquera qu'avec cette définition* $\chi_u$ *est* **unitaire**

**Exemple.** *Polynôme caractéristique d'une symétrie.*

## 2.2 Propriété

**Propriété.** $\chi_u$ *est un polynôme* **unitaire de degré** $n$**.**
*Le terme constant de* $\chi_u$ *vaut* $\chi_u(0) = (-1)^n det(u)$**.**
*Le terme de degré* $n-1$ *vaut* $-tr(u)$

preuve :

## 2.3 Lien avec sp(u)

**Lemme.** *Si* $u \in L(E)$ *alors :* $\lambda \in sp(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$**.**

**Remarque.** $sp(u)$ *est donc l'ensemble des racines de* $\chi_u$.

**Corollaire.** $sp(u)$ *possède au plus* $n$ **éléments.**
*Si* $K = \mathbb{C}$ *alors* $u$ *admet au moins une valeur propre.*

preuve :

## 2.4 Ordre de multiplicité

### 2.4.1 Définition

Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in sp(u)$. Alors on appelle ordre de multiplicité de $\lambda$ comme valeur propre de $u$ l'ordre de multiplicité de $\lambda$ **comme racine de** $\chi_u$**.**

### 2.4.2 Théorème

Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in sp(u)$. On note $k$ l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda$.
Alors : $1 \leq dim(E_\lambda(u)) \leq k$**.**

**Corollaire.** *Si* $\lambda$ *est valeur propre* **simple**
**alors** $dim(E_\lambda(u))) = 1$

preuve :

## 2.5 Théorème de Hamilton-Cayley

**Théorème . Si** $u \in L(E)$ **alors** $\chi_u(u) = 0_{L(E)}$

**Remarque.** *Autrement dit, le polynôme caractéristique de* $u$ *est un polynôme annulateur de* $u$.

preuve : (non exigible)

# 3 Généralisation pour une matrice

On va généraliser à $A \in M_n(K)$ les notions précédentes. On ne perdra pas de vue que $A$ est la matrice relativement à la base canonique de $M_{n,1}(K)$ d'un endomorphisme $u$ de $L(M_{n,1}(K))$.

## 3.1 Eléments propres pour une matrice

**Définitions.** *Soit $A \in M_n(K)$. Alors :*

- *$\lambda \in K$ est valeur propre de $A$*
  *si et seulement si $\exists X \in M_{n,1}(K)$ tel que* $\begin{cases} AX = \lambda X \\ X \neq 0 \end{cases}$
- *$X \in M_{n,1}(K)$ est un vecteur propre de $A$*
  *si et seulement si $\exists \lambda \in K$ tel que :* $\begin{cases} AX = \lambda X \\ X \neq 0 \end{cases}$
- *On note $sp(A)$ et on appelle spectre de $A$ l'ensemble des valeurs propres de $A$.*
- *Si $\lambda \in sp(A)$ alors on pose $E_\lambda(A) = ker(A - \lambda I_n)$.*
  *Cet ensemble est appelé sous espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.*

**Remarques.** *On note parfois $sp_K(A)$ le spectre de $A$ pour bien spécifiée dans quel corps on travaille.*
*En particulier si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors il faut bien faire la différence entre $sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $sp_{\mathbb{C}}(A)$ qui peuvent être différent.*

## 3.2 Caractérisation des valeurs propres

**Lemme.** *Soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors :*
$\lambda \in sp(A)$
$\Leftrightarrow ker(A - \lambda I_n) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$
$\Leftrightarrow rg(A - \lambda I_n) \neq n$
$\Leftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0$

## 3.3 Polynôme caractéristique

### 3.3.1 Définition

**Définition.** *Soit $A \in M_n(K)$.*
*Alors on pose $\chi_A(X) = det(XI_n - A)$.*
*$\chi_A$ est appelé polynôme caractéristique de $A$.*

### 3.3.2 Propriété

**Lemme.** *$\chi_A$ est un polynôme de degré $n$ qui s'écrit sous la forme :* $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n det(A)$
*Les valeurs propres de $A$ sont les racines de $\chi_A$*
*Le spectre de $A$ est l'ensemble des racines de $\chi_A$.*

**Définitions.** *L'ordre de multiplicité d'une valeur propre $\lambda$ de $A$ est défini comme étant l'ordre de multiplicité de $\lambda$ en tant que racine de $\chi_A$.*

**Exemple.** *Valeurs propres de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

## 3.4 Cas particulier

**Lemme.** *Si $A$ est une matrice triangulaire alors ses valeurs propres sont* **les termes de la diagonale**

preuve :

### 3.5 Théorèmes

**Théorème .** *Soit* $A \in M_n(K)$ *et* $\lambda \in sp(A)$. *On note* $k$ *l'ordre de multiplicité de la valeur propre* $\lambda$.
*Alors :* $1 \leq dim(ker(A - \lambda I_n)) \leq k$

**Corollaire.** *Si* $\lambda$ *est valeur propre simple de* $A$
*alors* $dim(ker(A - \lambda I_n)) = 1$

**Théorème .** **Une somme finie de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.**

**Théorème .** *Théorème de Hamilton-Cayley*
**Si** $A \in M_n(K)$ **alors** $\chi_A(A) = 0_{M_n(K)}$

**Remarque.** *Autrement dit, le polynôme caractéristique de* $A$ *est un polynôme annulateur de* $A$.

preuve : (non exigible)

### 3.6 Lien avec les endomorphismes

**Lemme.** *Soit* $A$ *une matrice de* $M_n(K)$ *et* $u$ *un endomorphisme d'un espace vectoriel* $E$ *de dimension* $n$ *admettant* $A$ *comme matrice relativement à une base* $B$ *de* $E$. *Alors :*
*i)* $\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \lambda \in sp(u)$
*ii)* $\chi_u = \chi_A$
*iii)* $x$ *vecteur propre de* $u \quad \Leftrightarrow \quad M_B(x)$ *vecteur propre de* $A$
*iv) L'ordre de multiplicité est le même comme valeur propre de* $A$ *et comme valeur propre de* $u$.

### 3.7 Matrices semblables

**Lemme.** *Deux matrices semblables ont* **même rang, même trace, même déterminant, même spectre et même polynôme caractéristique.**

**Remarques.** *Attention !! il n'y a pas de réciproque !!!*
*Attention, les sous-espaces propres sont différents !!*
*On a de même que :* $A$ *et* $A^T$ *ont même rang, même déterminant, même trace, même spectre et même polynôme caractéristique.*

## Sommaire

**preuve du 2.5. : Hamilton-Cayley pour un endormorphisme.**

THEOREME : Si $u$ est un endomorphisme d'un $K$ espace vectoriel $E$ de dimension finie, alors : $\chi_u(u) = 0_{L(E)}$

preuve: On va montrer que pour tout $x \in E$, $\chi_u(u)(x) = 0_E$.
Le cas $x = 0_E$ étant immédiat, on va traiter le cas $x \neq 0_E$.
Comme $x \neq 0_E$ alors on peut poser : $p = min(\{k \in \mathbb{N}^* \ , \ (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre } \})$
Par définition de $p$ $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), u^p(x))$ est liée et $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, donc : $\exists (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in K^p \ \ u^p(x) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)$

Comme $(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$ est libre alors on peut compléter cette famille en $B = (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x), e_1, \ldots, e_{n-k})$ une base de $E$.

La matrice de $u$ relativement à $B$ est alors : $M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_0 & * \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{p-1} & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_p & * \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$

avec $B \in M_{n-p}(K)$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{p-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_p \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est de $u$ est le même que $M_B(u)$, et par matrice par blocs on a : $\chi_u(X) = \chi_C(X)\chi_B(X)$

En reprenant le résultat de l'exercice corrigé 4.3., on a : $\chi_C(X) = X^p - \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i X^i$

On sait alors que :
$\chi_u(u) = \chi_B(u) \circ \chi_C(u)$ et donc $\chi_u(u)(x) = \chi_B(u) \circ \chi_C(u)(x)$

Mais $\chi_C(u)(x) = u^p(x) - \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) = 0_E$ par construction des $a_i$
On en déduit : $\chi_u(u)(x) = \chi_B(u)(\chi_C(u)(x) = \chi_B(0_E) = 0_E$

On a donc démontrer que : $\forall x \in E \ , \ \chi_u(u)(x) = 0_E$ ce qui signifie bien $\chi_u(u) = 0_{L(E)}$

**preuve du 3.3.2. : Propriété du polynôme caractéristique d'une matrice**

**Théorème .** *Soit $A$ une matrice de $M_n(K)$ avec $n \geq 1$ et $\chi_A$ son polynôme caractéristique.*
*Alors $\chi_A$ est un polynôme de degré $n$ qui s'écrit sous la forme :* $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n det(A)$

preuve :

Par définition $\chi_A(X) = det(XI_n - A)$

On note $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(K)$ de telle sorte que $I_k$ est la k-ième colonne de $I_n$.

On notera aussi pour $k \in [\![1;n]\!]$ , $C_k$ la k-ième colonne de $A$.

On a alors $A = (C_1|C_2|\ldots|C_n)$ et $I_n = (E_1|E_2|\ldots|E_n)$, donc $XI_n - A = (XE_1 - C_1|\ldots|XE_k - C_k|\ldots|XE_n - C_n)$

On a donc : $\chi_A(A) = det(XI_n - A) = det(XE_1 - C_1|\ldots|XE_k - C_k|\ldots|XE_n - C_n)$
Par linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne on a : $\chi_A(X) = \sum\limits_{i_1=1}^{2} \sum\limits_{i_2=1}^{2} \cdots \sum\limits_{i_n=1}^{2} det(C'_{1,i_1}|\ldots|C'_{k,i_k}|\ldots|C'_{n,i_n})$
avec $C'_{k,1} = XE_k$ et $C'_{k,2} = -C_k$

On remarque alors que $det(C'_{1,i_1}|\ldots|C'_{k,i_k}|\ldots|C'_{n,i_n})$ est un polynôme en X de degré, le nombre de fois ou $C'_{j,i_k}$ vaut $XE_k$ (ou encore le nombre de $i_k$ valant 1).

• Pour avoir un terme de degré $n$ il faut que tout les $c'_{k,i_k}$ valent $XE_k$, le terme en $X^n$ est donc : $det(E_1|\ldots|E_n) = det(I_n) = 1$

• Pour avoir un terme de degré $n-1$ il faut que tout les $c'_{k,i_k}$ valent $XE_k$ sauf exactement 1, le terme en $X^{n-1}$ est donc :

$$\sum_{k=1}^{n} det(XE_1|\ldots|XE_{k-1}| - C_k|X_Ek+1|\ldots|XE_n)$$
$$= (\sum_{k=1}^{n} det(E_1|\ldots|E_{k-1}| - C_k|_Ek+1|\ldots|E_n))X^{n-1}$$
$$= (\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{1,k} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{k-1,k} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_{k,k} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & -a_{k+1,k} & 1 & 0\ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_{n,k} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} X^{n-1}$$
$$= (\sum_{k=1}^{n} -a_{k,k})X^{n-1}$$
$$= -tr(A)X^{n-1}$$

• Le terme de degré 0 est plus simple puisqu'il vaut : $\chi_A(0) = det(0.I_n - A) = det(-A) = (-1)^n det(A)$

• Au bilan, on a bien $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)$.