Feuille d'exercices n°34 : chap. 13

Exercice 291. *Soit* $E = M_{2,1}(\mathbb{R})$ *et* f *l'endomorphisme de* E *admettant* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *comme matrice relativement à la base canonique de* E*. Soit* $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que u *est un vecteur propre de* f*, quelle est la valeur propre associée ?*
b) Montrer que 1 *est valeur propre de* f *et trouver les vecteurs propres associés.*
c) Trouver une base de E *formée de vecteurs propres de* f*.*

Exercice 292. *Soit l'endomorphisme de* $M_2(\mathbb{R})$ *:* $\begin{array}{rccc} f & : & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}$

Déterminer les éléments propres de f*.*

Exercice 293. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel de dimension finie et* $f \in L(E)$*.*
Soit x *un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* λ *et* y *un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* μ*. On suppose que* $\mu \neq \lambda$
Montrer que (x, y) *est libre.*

Exercice 294. *Soit l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}[X]$ *défini par :*
$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$
a) Si P *un vecteur propre de* f*, que peut-on dire du degré de* P *?*
b) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f*.*

Exercice 295. $\star$ *Soit* E *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel de dimension finie et* $f \in L(E)$*.*
On suppose que : $\forall x \in E\ ,\ \exists \lambda \in \mathbb{R}$ *tel que :* $f(x) = \lambda x$
Montrer que f *est une homothétie, autrement dit qu'il existe* $\mu \in \mathbb{R}$ *tel que :* $f = \mu Id_E$

Exercice 296. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel de dimension finie et* $f, g \in L(E)$*. On suppose que* f *et* g *commutent. Montrer que les sous espaces propres de* f *sont stables par* g

Exercice 297. *Déterminer le polynôme caractéristique de* U *la matrice de* $M_n(\mathbb{R})$ *ne contenant que des 1.*

Exercice 298. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$*. On pose* $\forall P \in E$
$\phi(P) = Q$ *avec* $Q(x) = (X+1)^2 P'(x) - (1+2X)P(X+1)$
Déterminer le polynôme caractéristique de ϕ

Exercice 299. $\star$ *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Trouver les éléments propres de A *et l'inverse de* A*.*