

Feuille d'exercices n°35 : chap. 13 et 14

Exercice 300. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$.

On considère les deux matrices de $M_{2n}(\mathbb{C})$ suivantes : $C = \begin{pmatrix} A & I_n \\ -XI_n & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} B & I_n \\ -XI_n & -A \end{pmatrix}$

a) Effectuer les produits par blocs CD et DC .

b) Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 301. (★) Oral CCinp 2015

Soit a et b deux réels distincts, $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$.

À tout polynôme P de E on associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par $\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$

a) Montrer que φ un endomorphisme de E ?

b) Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ on pose $P_k = (X - a)^k(X - b)^{n-k}$ Calculer $\varphi(P_k)$

c) Déterminer les sous-espaces propres de φ .

Exercice 302. Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A

b) Déterminer le spectre de A

c) Déterminer les sous espaces propres de A

d) Diagonaliser A

Exercice 303. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A

b) A est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? si oui, la diagonaliser.

c) A est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$? si oui, la diagonaliser.

Exercice 304. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -15 \\ -5 & -6 & 13 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice 305. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice 306. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1+i \\ 1 & 1+i & -1-i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{C})$

Exercice 307. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ dans $M_4(\mathbb{R})$

Exercice 308. Trouver les matrices de $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et telles que $sp(M) = \{\lambda\}$