Feuille d'exercices n°36 : chap. 14

Exercice 309. *Montrer que si $A \in M_n(K)$ est diagonalisable alors $\forall P \in K[X]$, $P(A)$ est diagonalisable.*

Exercice 310. $\star$ *a) Montrer que si $A \in M_2(\mathbb{R})$ est symétrique alors A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.*
b) Trouver $A \in M_2(\mathbb{C})$ symétrique et non diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.

Exercice 311. $(\star)$
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Résoudre l'équation matricielle : $X^3 = A$ d'inconnue $X \in M_3(\mathbb{R})$

Exercice 312. *On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -11 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*
a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
b) A est-elle trigonalisable ?
c) Déterminer les sous espaces propres de A.
d) A est-elle diagonalisable ?
e) Déterminer (e_2, e_3), deux vecteurs non nuls tels que : $Ae_2 = -e_2$ et $Ae_3 = -e_3 + e_2$
f) Réduire A
g) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 313. *On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & 9 \end{pmatrix}$.*
a) Montrer que A admet une valeur propre triple que l'on notera λ.
b) A est-elle diagonalisable, trigonalisable ?
On pose $N = A - \lambda I_3$
c) Calculer N, N^2 et N^3.
d) Déterminer e_1 pour que (e_1) soit une base de $Im(N^2)$.
e) Déterminer e_3 tel qe : $e_1 = N^2 e_3$
On pose $e_2 = Ne_3$
f) Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
g) Trigonaliser A
h) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 314. $\star$
a) Montrer que toutes les matrice de $M_2(\mathbb{C})$ sont trigonalisables.
b) Montrer que toutes les matrice de $M_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables pour $n \in \mathbb{N}^*$.