Feuille d'exercices n°37 : chap. 14

Exercice 315. *(banque PT 2000, épreuve IIA, exercice 1 (sans calculatrice)*
Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ respectivement représentés dans la base canonique B_a de $\mathbb{R}^3$ par les matrices A et B suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
1°) Former les polynômes caractéristiques de f et g.
En déduire les valeurs propres de f et g.
2°) Déterminer, par leurs équations, les sous-espaces propres de f et g.
3°) Construire une base B'_a de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont à la fois vecteur propre de f et vecteur propre de g ; la première composante de ces vecteurs sera obligatoirement prise égale à 1.
4°) Donner les matrices de passage directe et inverse de la base B_a à la base B'_a, ainsi que les matrices A' et B' qui représentent respectivement f et g relativement à la base B'_a.

Exercice 316. *a) Trigonaliser* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$

Exercice 317. *Montrer que les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont semblables dans $M_3(\mathbb{R})$.*

Exercice 318. *Déterminer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$* $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$

Exercice 319. *Trouver les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 0$*

Exercice 320. *Trouver le nombre de façons d'atteindre la n-ième marche d'un escalier en montant une ou deux marches à la fois.*

Exercice 321. *a) Trouver les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$*
b) Trouver les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$ et $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

Exercice 322. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -2+4a & -3a+3 \\ 2a-2 & -a+3 \end{pmatrix}$
Donner une CNS sur $a \in \mathbb{R}$ pour que A soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.
Donner une CNS sur $a \in \mathbb{R}$ pour que A soit trigonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 323. $\star$ *Même exercice que le précédent avec* $A = \begin{pmatrix} -2a-2 & -6a-6 & 4+6a \\ a+1 & 3a+3 & -1-2a \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$