Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°6

EXERCICE 1 : Suite et série de fonctions

1°) • Si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

• Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exp-puissance (car $x^2 > 0$)

Bilan : $\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers la fonction nulle sur } \mathbb{R}.}$

2°) • Si $n = 0$, la fonction f_n est nulle sur $\mathbb{R}$. L'étude est donc déjà faite.

• Si $n \neq 0$: f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = ne^{-nx^2} + nx(-2nx)e^{-nx^2} = ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	-	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}})$	$\searrow$	0

$f(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2}$

3°) Comme les fonctions f_n sont impaires, on déduit du tableau de variations du 2°) que :

$||f_n||_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\boxed{\text{La convergence de } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vers } f \text{ n'est donc pas uniforme sur } \mathbb{R}.}$

4°) Soit $a > 0$, comme $\frac{1}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $a > \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Pour $n > N$ on a donc f_n décroissante sur $[a, +\infty[$ et donc :

$||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{t\in[a,+\infty[} |f(t)| = f_n(a) = nae^{-na^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\boxed{\text{La convergence de } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vers } f \text{ est donc donc uniforme sur } [a, +\infty[.}$

5°) • Si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0$ donc la série $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente.

• Si $x \neq 0$ alors $\frac{f_n(x)}{\frac{1}{n^2}} = n^3xe^{-nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exponentielle-puissance et donc $f_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$.

Comme, de plus, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann **absolument** convergente alors, par négligeabilité on a $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ qui est convergente.

Bilan : $\boxed{\text{Le domaine de définition de } S \text{ est } \mathbb{R}.}$

6°) Comme $||f_n||_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors la série $\sum ||f_n||_\infty$ est grossièrement divergente et donc

$\boxed{\text{la série de fonction } \sum f_n \text{ n'est pas normalement convergente sur } \mathbb{R}}$

7°) Comme $\sum ||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sum f_n(a)$ est convergente (a est dans le domaine de S), alors la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement vers S sur $[a, +\infty[$

Comme de plus, chaque fonction f_n est continue sur $[a, +\infty[$, alors, par le théorème de continuité des séries de fonctions, on a : S est continue sur $[a, +\infty[$

Comme $\bigcup\limits_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$, alors S est continue sur $]0, +\infty[$

Comme de plus, S est impaire, alors : $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$

8°) Soit $a > 0$ et $x > a$. Alors :

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } [a, +\infty[\\ \text{la série de fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge normalement, donc uniformément vers } f \text{ sur } [a, +\infty[\end{cases}$$

On peut donc utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment et on a : $\int\limits_a^x S(t)dt = \int\limits_a^x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^x f_n(t)dt$

Donc $\int\limits_a^x S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^x nte^{-nt^2}dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [-\frac{e^{-nt^2}}{2}]_a^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [\frac{e^{-na^2}}{2} - \frac{e^{-nx^2}}{2}] = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-a^2})^n - \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-x^2})^n$

On a pu couper en deux séries car elles sont convergentes puisque ce sont des séries géométriques convergentes (|raison|<1)

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-a^2})^n = \frac{1}{1-e^{-a^2}}$ et de même $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-x^2})^n = \frac{1}{1-e^{-x^2}}$

Alors : $\int\limits_a^x S(x)dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{1-e^{-a^2}} - \frac{1}{1-e^{-x^2}}]$

Cette expression permet de voir que S est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ puisqu'une de ses primitives l'est.

En dérivant l'expression ci-dessus on obtient :
$\forall x > a \ , \ S(x) = 0 + \frac{xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = x\frac{e^{-x^2}}{(e^{-x^2/2}(e^{x^2/2} - e^{-x^2}/2))^2} = x\frac{1}{(2sh(x^2/2))^2} = \frac{x}{4sh^2(x^2/2)}$

Comme cette expression est valable pour tout $x > a$ et pour tout $a > 0$, elle est valable sur $]0, +\infty[$, puis par parité elle est valable sur $\mathbb{R}^*$

On a donc : $\boxed{S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{4sh^2(x^2/2)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}}$

Remarque : on peut déduire de cette expression que f n'est pas continue en 0.

EXERCICE 2 : Exercice oral ccINP 2025

1) Soit $X = (x, y) \in E$, $Y = (x', y') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\lambda X = (\lambda x, \lambda y)$ donc

$N(\lambda X) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda xt + \lambda y| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda|\,|xt + y| = |\lambda| \sup\limits_{t\in[0,1]} |xt + y| = |\lambda| \sup\limits_{t\in[0,1]} |xt + y| = |\lambda|\, N(X)$

- $N(X) = 0$

$\Rightarrow \forall t \in [0, 1]\ ,\ xt + y = 0$
$\Rightarrow x = y = 0$
$\Rightarrow X = 0$ car on a un polynôme qui a une infinité de racines.

- $N(X + Y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |(x + x')t + (y + y')|$

Mais par inégalité triangulaire :
$|(x + x')t + (y + y')| = |(xt + y) + (x't + y')| \leq |xt + y| + |x't + y'| \leq N(X) + N(Y)$
En passant au sup sur $t \in [0, 1]$ on a : $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$

Donc $\boxed{N \text{ est bien une norme sur } \mathbb{R}^2.}$

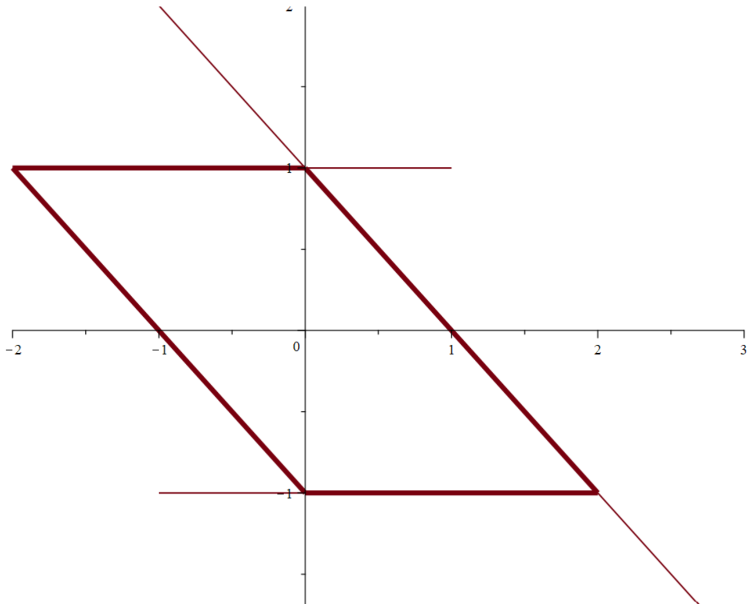
2) • On chercher à dessiner : $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ N(x,y) \leq 1\}$

• On remarque que : $t \mapsto xt + y$ est une fonction affine, qui est donc strictement monotone entre y et $x+y$
On en déduit $N(x,y) = Max(|y|\,, |x+y|)$

Remarque : on aurait pu utiliser cette expression pour montrer que N était une norme.

• On a alors : $(x,y) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \leq 1 \\ |x+y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq x+y \leq 1 \end{cases}$

On trace les droites $y = 1$, $y = -1$, $x + y = -1$ et $x + y = 12$ et on en déduit le tracé de B.



3) On a vu en 3) que : si $X = (x,y)$ alors $N(X) = Max(|y|\,, |x+y|)$

• $|x| \leq ||X||_\infty$ et, par inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x| + |y| \leq ||X||_\infty + ||X||_\infty = 2\,||X||_\infty$
Donc $N(X) \leq 2\,||X||_\infty$

• On a aussi, par la deuxième inégalité triangulaire :
$|x| - |y| \leq |x+y| \Rightarrow |x| \leq |x+y| + |y| \leq N(X) + N(X) \leq 2N(X)$
D'autre part $|y| \leq N(X) \leq 2N(X)$
En passant au max on a : $||X||_\infty \leq 2N(X)$

• En regroupant les deux résultats ci-dessus : $\frac{1}{2}N(X) \leq ||X||_\infty \leq 2N(X)$

• On va maintenant montrer que les deux constantes ci-dessus sont les meilleurs.
Soit donc $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que : $\forall X \in \mathbb{R}^2 \ , \ \alpha N(X) \leq ||X||_\infty \leq \beta N(X)$

Si on prend $X = (1,1)$ alors $||X||_\infty = 1$ et $N(X) = 2$ donc $2\alpha \leq 1 \leq 2\beta$ donc $\alpha \leq \frac{1}{2}$
Comme $\frac{1}{2}$ convient, c'est bien la plus grande valeur de α possible.

Si on prend $X = (2,-1)$ alors $||X||_\infty = 2$ et $N(X) = 1$ donc $\alpha \leq 2 \leq \beta$ donc $\beta \geq 2$
Comme 2 convient, c'est bien la plus petite valeur de β possible.

On a bien optimiser les constantes ci-dessus.

EXERCICE 3 : Exercice oral Mines télécom 2025

1 a) • Pour $a < 0$ on a, par comparaison exp-puissance : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$
Donc $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.

• Pour $a \geq 0$, on a : $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$
Par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ on a $\sum f_n(x)$ convergente.

• Bilan : $\boxed{\text{Le domaine de } f \text{ est } [0, +\infty[}$

b) Comme f_n est décroissante sur $[0, +\infty[$, que : $f_n(0) = \frac{1}{1+n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$:
alors, on peut pose $||f_n||_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$ et on a : $||f_n||_\infty = \frac{1}{1+n^2}$

$\frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc, par équivalent :
$\sum ||f_n||_\infty = \sum \frac{1}{1+n^2}$ est convergente et donc $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$

La convergence uniforme impliquant la convergence uniforme on a $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$

Les f_n étant continues et la continuité étant conservé par convergence uniforme on conclut que :

$\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

c) Posons $a > 0$.
Les f_n sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$
Posons $N(f_n') = \sup\limits_{x \geq a} |f_n'(x)|$ alors, comme pour f_n on a : $N(f_n') = \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$
Par comparaison exp-puissance on a : $\frac{N(f_n')}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{1+n^2} e^{-na} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $a > 0$
On en déduit $N(f_n') = o(\frac{1}{n^2})$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann absolument convergente, alors $\sum N(f_n')$ est convergente et on en déduit que : $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$, et donc que $\sum f_n'$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.

Les f_n sont C^1 sur $[a, +\infty[$, $\sum f_n$ converge simplement vers S sur $[a, +\infty[$, $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, donc S est C^1 sur $[a, +\infty[$

Comme $\bigcup\limits_{a > 0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$ alors $\boxed{S \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$

d) Soit $x > 0$, étudions le taux de variations de f en 0 :
On pose $\delta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{e^{-nx} - 1}{1+n^2}}{x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx} - 1}{x} \frac{1}{1+n^2}$

On a pour tout $N \in \mathbb{N}$: $0 \leq \sum\limits_{n=0}^{N} \underbrace{\frac{1 - e^{-nx}}{x}}_{\geq 0} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1-e^{-nx}}{x} \frac{1}{1+n^2} \leq -\delta(x)$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$: $0 \leq \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1-e^{-nx}}{nx} \frac{n}{1+n^2} \leq -\delta(x)$

Soit $A > 0$. Comme la série $\sum \frac{n}{1+n^2}$ est divergente et à termes positifs, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} > A + 1$ car $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1-e^{-nx}}{nx}\frac{n}{1+n^2} = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}$ alors il existe $x_0 > 0$ tel que :
$\forall x \in]0, x_0[\ ,\ \left| \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1-e^{-nx}}{nx}\frac{n}{1+n^2} - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} \right| \leq 1$

On a alors : $\forall A > 0\ ,\ \exists x_0 > 0\ ,\ \forall x \in]0, x_0[\ ,\ A \leq \delta(x)$
On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} -\delta(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \delta(x) = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0, par contre sa représentation graphique admet une tangente verticale.

EXERCICE 4 : début de Centrale, Mathématiques 2 PSI 2025

Q1) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n$ est une série géométrique de raison e^{-x} donc convergente si et seulement si $-1 < e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$
On a donc : $\boxed{D_f =]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in D_f\ ,\ f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}}$

Q2) Avec l'expression de la question Q1), on a clairement que f est C^1 sur D_f (car $1 - e^{-x} \neq 0$ sur D_f) et $\forall x \in D_f\ ,\ f'(x) = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

$\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } D_f \text{ et } \forall x \in D_f\ ,\ f'(x) = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}$

Q3) Au voisinage de $x = 0$:

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$
$$= \frac{1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{(1-(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)))^2}$$
$$= \frac{1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}$$
$$= \frac{1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - 2(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}) + \frac{-2(-3)}{2!}\frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x + (\frac{-1}{3} + \frac{3}{4})x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 + x + \frac{5}{12}x^2 - x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$$

On a donc : $\boxed{\text{au voisinage de } 0 : \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)}$

Q4) • On pose $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & e^{-nx} \end{array}$

Soit $a > 0$.
On a vu en Q1) que $(\sum\limits_{n\geq 0} f_n)$ convergeait simplement vers f sur $D_f =]0, +\infty[$
Pour $x > 0\ ,\ f_n'(x) = -ne^{-nx}$
On remarque que $||f_n'||_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)| = ne^{-na}$

De plus au voisinage de $+\infty$: $ne^{-na} = o(\frac{1}{n^2})$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série absolument convergente, alors, par négligeabilité, $\sum ||f_n'||_\infty^{[a,+\infty[}$ est convergente et donc $\sum f_n'$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[a,+\infty[$.

On a $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\\ \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } [a,+\infty[\\ \sum\limits_{n\geq 0} f_n' \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[\end{cases}$

Donc, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on a f qui est C^1 sur $[a,+\infty[$ (on le savait déjà) mais aussi : $\forall x \in [a,+\infty[\ ,\ f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$

Comme $\bigcup\limits_{a>0} [a,+\infty[=]0,+\infty[= D_f$ alors ce résultat est valable sur D_f

Donc $\forall x > 0\ ,\ f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-ne^{-nx})$

- On a aussi vue en Q2) que $\forall x > 0\ ,\ f'(x) = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

Donc, $\forall x > 0\ ,\ \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$

En utilisant Q3), pour x au voisinage de 0^+ : $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{12} + o(1)$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{-1}{12}}$

Remarque : limite par 0^+ et pas par 0, $-1/12$ annoncé dans le préambule ...

EXERCICE 5 : problème issue de ccinp 2025 MP, mathématiques 1

I.1.) • $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geq 0$ donc $\boxed{(S_n) \text{ est décroissante.}}$

- $J_{n+1} - J_n = \int\limits_n^{n+1} \underbrace{f(t)}_{\geq 0}\, dt \geq 0$ donc $\boxed{(J_n) \text{ est décroissante.}}$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Alors, comme f est décroissante sur $[k-1,k]$ on a : $\forall t \in [k-1,k]\ ,\ f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$

En intégrant cette inégalité sur $[k-1,k]$ on obtient : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ f(k) \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)}$

I.2.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si on somme la double inégalité obtenue au I.1.) pour k variant de 1 à n on obtient :

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1)$

On utilise la relation de Chasles et la définition de S_n et S_{n-1} pour avoir : $S_n - f(0) \leq \int\limits_0^n f(t)dt \leq S_{n-1}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}}$

I.3.a) Montrons par double implication la propriété voulue.

• Supposons f intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Alors $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$, donc (J_n) est bornée.

Avec I.2) et la première inégalité on en déduit (S_n) majorée, et comme (S_n) est croissante (I.1.) alors (S_n) est convergente et donc $\sum f(n)$ est convergente.

• Supposons $\sum f(n)$ convergente.

Alors (S_n) est convergente et donc majorée.

Avec la première inégalité du I.2.) on en déduit (J_n) majorée, et comme (J_n) est croissante (I.1.) alors (J_n) est convergente.

Posons alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lambda$

Pour $x > 0$, on a : $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$

Et comme $f(t) \geq 0$ alors : $\int\limits_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)dt \leq \int\limits_0^{x} f(t)dt \leq \int\limits_0^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)dt$

Donc : $\underbrace{J_{\lfloor x \rfloor}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\lambda} \leq \int\limits_0^{x} f(t)dt \leq \underbrace{J_{\lfloor x \rfloor+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\lambda}$

Par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^{x} f(t)dt = \lambda$

On en déduit : $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, et comme $f(t) \geq 0$ alors f est intégrable sur $[0, +\infty[$

• On a donc l'équivalence : $\boxed{f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ si et seulement si la série } \sum f(n) \text{ converge}}$

I.3.b) On reprend l'inégalité de I.1.) pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on obtient : $0 \leq \int\limits_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$

En sommant de $n = 1$ à $N \in \mathbb{N}^*$ on obtient, par télescopage : $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\int\limits_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right) \leq f(0) - f(N)$

Comme f est positive alors $f(N) \geq 0$ et on alors : $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\int\limits_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right) \leq f(0)$

$\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \left(\int\limits_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right) \right)$ est alors une suite croissante (somme partielle d'une série à termes positifs), majorée, donc cette suite est convergente et donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq1} \left(\int\limits_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right) \text{ est convergente.}}$

I.4.a) • f est dérivable sur $[2, +\infty[$ et

$f'(x) = \frac{-1}{x^2(ln(x))^{2\alpha}} \left((ln(x))^{\alpha} + \alpha (ln(x))^{\alpha-1} \right) \leq 0$ car $\alpha > 0$ et $x \geq 2 \Rightarrow ln(x) > 0$

Donc : $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [2, +\infty[}$

• Calculons $\int\limits_2^{x} f(t)dt$ en distinguant deux cas :

Cas 1 : $\alpha \neq 1$

$$\int\limits_2^{x} f(t)dt = [\tfrac{1}{1-\alpha} \tfrac{1}{(ln(t))^{\alpha-1}}]_2^x = \tfrac{1}{1-\alpha} \tfrac{1}{(ln(x))^{\alpha-1}} - \tfrac{1}{1-\alpha} \tfrac{2}{(ln(t))^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} \frac{2}{(ln(t))^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Cas 2 : $\alpha = 1$

$\int\limits_2^x f(t)dt \int\limits_2^x \frac{1}{tln(t)}dt = [ln(ln(t))]_2^x = ln(ln(x)) - ln(ln(2)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On en déduit que : $\int\limits_2^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

Comme f est décroissante et positive sur $[2, +\infty[$, on peut appliquer I.3.a) et en déduire :

$\boxed{\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^\alpha} \text{ convergente si et seulement si } \alpha > 1}$

Remarque : le cas $\alpha \leq 0$ n'est pas traité, mais dans ce cas la divergence est grossière.

I.4.b) Comme à la question 1, on a : $\forall n \geq 2$: $\frac{1}{(n+1)(ln(n+1))^2} \leq \int\limits_n^{n+1} \frac{dt}{t(ln(t))^2} \leq \frac{1}{n(ln(n))^2}$

En sommant de 2 à $+\infty$, par la relation de Chasles, et comme les séries et l'intégrale sont convergentes :

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(n+1)(ln(n+1))^2} \leq \int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t(ln(t))^2} \leq \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^2} - \frac{1}{(ln(2))^2} \leq [\frac{-1}{ln(t)}]_2^{+\infty} \leq \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^2} - \frac{1}{(ln(2))^2} \leq \frac{1}{ln(2)} \leq \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^2}$

On a donc : $\boxed{\frac{1}{ln(2)} \leq \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^2} \leq \frac{1}{ln(2)} + \frac{1}{(ln(2))^2}}$

I.5.a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante et positive sur $]0, +\infty[$.

On peut donc lui appliquer la question I.3.b) et en déduire : $\sum \Big(\int\limits_{n-1}^{n} \frac{1}{t}dt - \frac{1}{n}\Big)$ convergente.

On remarque que (T_n) est la suite des sommes partielles de cette série, donc $\boxed{(T_n) \text{ converge.}}$

I.5.b) $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \gamma$ s'écrit $T_n = \gamma + o(1)$ et donc $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + o(1)}$

On en déduit : $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)}$

I.6.a) g_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g_n'(x) = \frac{n^2+x^2-2x^2}{(n^2+x^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$

On en déduit le tableau de variation sur $]0, n[$:

x	0		n		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	-	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	0

On en déduit : $||g_n||_\infty^{]0,+\infty[} = \sup\limits_{x\in]0,+\infty[} |g_n(x)| = \frac{1}{2n}$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente on en déduit que :

$\boxed{\sum g_n \text{ n'est pas normalement convergente sur }]0, +\infty[}$

I.6.b) f est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc comme en 1.), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int\limits_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(t)dt$

En sommant de $k = 1$ à n : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* , \int\limits_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \leq \int\limits_0^{n} f(t)dt}$

I.6.c) • Soit $A > 0$. Alors: $\int_0^A f(t)dt = \int_0^A \frac{x}{t^2+x^2}dt = \int_0^A \frac{1}{x}\frac{1}{1+(\frac{t}{x})^2}dt = [arctan(\frac{t}{x})]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

On en déduit que : $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2}$

• De même, on démontre que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et que $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} - arctan(\frac{1}{x})$

• Comme $f(k) = \frac{x}{k^2+x^2} = g_k(x) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2} > 0$ et que $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente.

On en déduit que $\sum f(k)$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$

• En faisant tendre n vers $+\infty$ dans le b), et en renommant k en n, on obtient :

$\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt$

Avec les remarques et calculs ci-dessus, on en déduit : $\boxed{\frac{\pi}{2} - arctan(\frac{1}{x}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}}$

I.6.d) • Par encadrement, on déduit du c) que : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}}$

• Supposons que $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$

Alors, comme de plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$, on aurait, par le théorème de la double limite :

$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x)$

Donc avec ce qui précède : $0 = \frac{\pi}{2}$

Absurde !!!!

On a montré par l'absurde que : $\boxed{\sum g_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]0, +\infty[}$

II.1.a) $\int_n^{n+1} f(t)dt$ on utilise la relation de Chasles et la définition de f

$= \int_n^{n+\frac{1}{2}} |sin(2\pi t)|\, dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} |sin(2\pi t)|\, dt$ changement de variable $u = t - n$ et $u = t - n - \frac{1}{2}$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} |sin(2n\pi + 2u\pi)|\, dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} |sin(2n\pi + \pi + 2u\pi)|\, dt$ par π périodicité de $u \mapsto |sin(u)|$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} |sin(2u\pi)|\, dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} |sin(2u\pi)|\, dt$

$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} |sin(2u\pi)|\, dt$ mais $u \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow 2u\pi \in [0, \pi] \Rightarrow sin(2\pi u) \geq 0$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2sin(2u\pi)dt$

$= [\frac{-cos(2\pi u}{\pi}]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{\pi}$ On a donc : $\boxed{\int_n^{n+1} f(t)dt = \frac{2}{\pi}}$

II.1.b) • Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $\lfloor x \rfloor \leq x$ et que $|sin(2\pi t)| \geq 0$ alors :

$\int\limits_1^x |sin(2\pi t)|\, dt \geq \int\limits_1^{\lfloor x \rfloor} |sin(2\pi t)|\, dt$ on utilise la relation de Chasles

$\Rightarrow \int\limits_1^x |sin(2\pi t)|\, dt \geq \sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor -1} \int\limits_k^{k+1} |sin(2\pi t)|\, dt$ on utilise le résultat du a)

$\Rightarrow \int\limits_1^x |sin(2\pi t)|\, dt \geq \sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor -1} \frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \int\limits_1^x |sin(2\pi t)|\, dt \geq (\lfloor x \rfloor - 1)\frac{2}{\pi}$

On a donc : $\boxed{\forall x \in [1, +\infty[\ ,\ \int\limits_1^x |sin(2\pi t)|\, dt \geq (\lfloor x \rfloor - 1)\frac{2}{\pi}}$

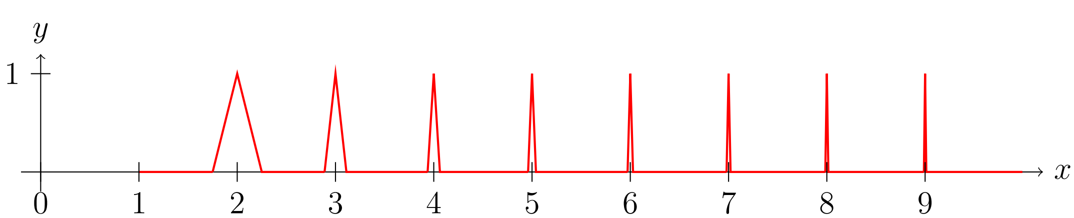
• Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor - 1 = +\infty$, on déduit de l'inégalité ci-dessus que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_1^x |f(t))|\, dt = +\infty$ et donc que $\int\limits_1^x |f(t))|\, dt$ est divergente. $\boxed{f \text{ n'est donc pas intégrable sur } [1, +\infty[}$

• On remarque que : $f(n) = 0$ et donc que $\boxed{\sum f(x) \text{ est convergente.}}$

II.2.) • Si on prend $\boxed{a_n = \frac{1}{n^2}}$. La longueur de $[n - a_n, n + a_n]$ est de $\frac{2}{n^2}$. Comme l'aire du triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 est égale à la longueur de la base fois la hauteur divisée par 2, alors son aire est bien égale à $\frac{1}{n^2}$.

• Voici le graphe de la fonction décrite par l'énoncé. Du moins, nous ne respectons la description que pour $n \geqslant 2$, car les intervalles $[1 - a_1, 1 + a_1]$ et $[2 - a_2, 2 + a_2]$ ne sont pas disjoints (on a $1 + a_1 = 2$): nous posons la fonction comme étant nulle sur $[1, 2 - a_2]$.

On obtient alors le graphe :



Cette fonction est continue et positive.

• On remarque que $f(n) = 1$ donc $\sum f(n)$ est grossièrement divergente.

• Pour $A > 1$, $0 \leq \int\limits_1^A f(t)dt \leq \int\limits_1^{\lfloor A \rfloor + 1} f(t)dt = \sum\limits_{n=2}^{\lfloor A \rfloor} \frac{1}{n^2} \leq \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ car série de Riemann convergente.

Comme $A \mapsto \int\limits_1^A f(t)dt$ est croissante (puisque $f(t) \geq 0$) et majorée, alors $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_1^A f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ et on a $\int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ convergente.

Comme f est positive on en déduit que : $\boxed{f \text{ intégrable sur } [1, +\infty[}$

Remarque : le II permet de voir que la condition "f décroissante" est indispensable pour le théorème de comparaison série-intégrale.