Chapitre 13 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 13.1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall P \in E$, $f(P) = (X+2)P' + P$
1°) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2°) Déterminer les éléments propres de f.

Correction

1°) On a bien $f(P) \subset E$ de manière directe.
Soient $P, Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$f(P+\lambda Q) = (X+2)(P+\lambda Q)' + (P+\lambda Q) = (X+2)P' + P + \lambda((X+2)Q' + Q) = f(P) + \lambda f(Q)$
On a donc f linéaire de E dans E : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2°) On cherche à résoudre $f(P) = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (paramètre) et $P \in E$ avec $P \neq 0$ (inconnue)

- Supposons que $\lambda \in sp(f)$, alors il existe $P \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $f(P) = \lambda P$

Donc $(X+2)P' = (\lambda - 1)P$, en regardant le terme de degré n on a : $n = \lambda - 1 \Rightarrow \lambda = 1 + n \Rightarrow \lambda \subset \mathbb{N}^*$
On a donc $sp(f) \subset \mathbb{N}^*$

- Réciproquement soit $\lambda = n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$

Cherchons un vecteur propre associé à λ sous la forme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (X+2)^k$
On remarquera le choix subtil de la base de $\mathbb{R}[X]$.
Alors $f(P) = \lambda P$
$\Leftrightarrow (X+2)P' + P = \lambda P$
$\Leftrightarrow (X+2) \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k (X+2)^{k-1} = (\lambda - 1) \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (X+2)^k$
$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} [(k+1-\lambda)a_k](X+2)^k$ on rappelle que, ici, $\lambda = 1 + n$
$\Leftrightarrow \forall k \in [\![0; n]\!]$, $(k-n)a_k = 0$
$\Leftrightarrow \forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $a_k = 0$ puisque $k - 1 \neq 0$ si $k < n$
$\Leftrightarrow P = a_n (X+2)^n$

On a donc trouver le sous espace propre associé $\lambda = 1 + n \in \mathbb{N}^*$ qui est dimension 1.
Donc $\mathbb{N}^* \subset sp(f)$

- Bilan : $\boxed{sp(f) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } sp(f) \text{ , } E_{n+1}(f) = Vect((X+2)^n)}$

Enoncé, Exercice 13.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ Trouver un polynôme annulateur de A, en déduire que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de I_3 et A.

Correction

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A. Alors $\chi_A(X) = det(XI_n - A)$

$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 3 & X-2 & 0 \\ 0 & -2 & X+3 \end{vmatrix}$ on fait $C_2 \longleftarrow C_2 + C_3$

$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 3 & X-2 & 0 \\ 0 & X+1 & X+3 \end{vmatrix}$ on développe par rapport à la première ligne :

$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ X+1 & X+3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & X-2 \\ 0 & X+1 \end{vmatrix}$

Donc $\chi_A(X) = (X-1)(X^2+X-6) - (3X+3) = X^3 - 10X + 3$

Par le théorème de Hamilton-Cayley on a donc $\boxed{X^3 - 10X + 3 \text{ qui est un polynôme annulateur de } A.}$

$A^3 - 10A + 3I_3 = 0 \Rightarrow A(A^2 - 10I_3) = -3I_3 \Rightarrow A\frac{A^2-10I_3}{-3} = I_3$

On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible et que } A^{-1} = \frac{10I_3 - A^2}{3}}$

Enoncé, Exercice 13.3

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E de dimension finie et non nulle. On suppose que : $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Correction

Comme E est de dimension finie, on peut considérer le polynôme caractéristique χ_u de u, qui admet au moins une racine puisque c'est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$.
u admet donc au moins une valeur propre λ. On note $F = ker(u - \lambda Id_E)$ le sous espace propre de u associé à λ.
Alors $x \in F \Rightarrow u(x) = \lambda x \Rightarrow v(u(x)) = \lambda v(x) \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$ car u et v commutent
Donc $x \in F \Rightarrow v(x) \in F$ On a F est stable par v et on peut considérer $w = v_F$ la restriction de v à F.
Comme $dim(F) \geq 1$, on peut reprendre le raisonnement de ce début d'exercice pour montrer que w admet un vecteur propre $y \in F$.
Ce vecteur y est alors un vecteur propre de u (puisqu'il est dans F) et un vecteur propre de v
(car $w(y) = \mu y \Rightarrow v(y) = \mu y$)

On a donc démontrer que : $\boxed{u \text{ et } v \text{ ont un vecteur propre commun.}}$