Chapitre 14 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 14.1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? dans $M_2(\mathbb{C})$? Si oui, diagonaliser A.

Correction

1) Calcul du polynôme caractéristique de A

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.
Alors $\chi_A(X) = det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2 + 1$

2) Recherche du spectre de A

$\chi_A(X) = 0 \Leftrightarrow (X-2)^2 = -1 \Leftrightarrow (X-2)^2 = I^2 \Leftrightarrow X = 2+i$ ou $X = 2-i$

χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_2(\mathbb{R})}$

$\lambda \in sp_{\mathbb{C}}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$ donc $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{2+i, 2-i\}$

A admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ et $A \in M_2(\mathbb{C})$ donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_2(\mathbb{C})}$

3) Recherche des sous-espaces propres de A

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{2+i}(A) = ker(A - (2+i)I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = ix$

On a donc $E_{2+i}(A) = Vect(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Comme A est réelle : $Ae_1 = (2+i)e_1$ donne en conjuguant $A\overline{e_1} = (2-i)\overline{e_1}$
On en déduit $E_{2-i}(A) = Vect(\overline{e_1})$

4) Diagonalisation de A

A est diagonalisable. On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres. Par la formule de changement de bases on a :

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}}$$

Enoncé, Exercice 14.2

Diagonaliser dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

Correction

1) Calcul du polynôme caractéristique de A

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.

Alors $\chi_A(X) = det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-4 & -6 & 6 \\ -2 & X-5 & 4 \\ -3 & -6 & X+5 \end{vmatrix}$

On effectue $C_3 \longleftarrow C_3 + C_2$: $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & -6 & 0 \\ -2 & X-5 & X-1 \\ -3 & -6 & X-1 \end{vmatrix}$

On effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$: $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & -6 & 0 \\ 1 & X+1 & 0 \\ -3 & -6 & X-1 \end{vmatrix}$

On fait un déterminant par blocs : $\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} X-4 & -6 \\ 1 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-3X+2)$

$\chi_A(X) = (X-1)(X-1)(X-2) = (X-1)^2(X-2)$

2) Recherche du spectre de A

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\boxed{A \text{ est trigonalisable dans } M_2(\mathbb{R})}$

$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 2$ donc $sp(A) = \{1; 2\}$

On ne peut pas encore savoir si A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ à cause de la valeur propre double.

3) Recherche des sous-espaces propres de A

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) = ker(A - I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y - 6z = 0 \\ 2x + 4y - 4z = 0 \\ 3x + 6y - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y - 2z = 0$$

On a donc $E_1(A) = Vect(e_1, e_2)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) = ker(A - 2I_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y - 6z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 6y - 7z = 0 \end{cases} \quad \text{On fait } L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 2x + 2z - 4z = 0 \\ 3x + 4z - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ 3z + 4z - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 3y = 2z \end{cases}$$

On a donc $E_2(A) = Vect(e_3)$ avec $e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) Diagonalisation de A

$dim(E_1(A)) + dim(E_2(A)) = 2 + 1 = 3$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3 et $A \in M_3(\mathbb{R})$. On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres. Par la formule de changement de bases on a :

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Enoncé, Exercice 14.3

Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Correction

---

1) Calcul du polynôme caractéristique de A

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.

Alors $\chi_A(X) = det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 2 & 1 \\ 0 & X & 1 \\ -3 & 5 & X-1 \end{vmatrix}$

On effectue $C_3 \longleftarrow C_3 + C_2 + C_1$: $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 2 & X+1 \\ 0 & X & X+1 \\ -3 & 5 & X+1 \end{vmatrix}$

On effectue $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$: $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -3 & 0 \\ 3 & X-5 & 0 \\ -3 & 5 & X+1 \end{vmatrix}$

On fait un déterminant par blocs : $\chi_A(X) = (X+1) \begin{vmatrix} X+1 & -3 \\ 3 & X-5 \end{vmatrix} = (X+1)(X^2 - 4X + 4)$

On a donc $\boxed{\chi_A(X) = (X+1)(X-2)^2}$

2) Recherche du spectre de A

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\boxed{A \text{ est trigonalisable dans } M_2(\mathbb{R})}$

$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 2$ donc $sp(A) = \{-1; 2\}$

On ne peut pas savoir si A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ à cause de la valeur propre double.

3) Recherche des sous-espaces propres de A

On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme -1 est valeur propre simple, alors $dim(E_{-1}(A)) = 1$,

on a donc $E_{-1}(A) = Vect(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) = ker(A - 2I_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 3x - 5y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = y \end{cases}$

On a donc $E_2(A) = Vect(e_2)$ avec $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) Trigonalisation de A

$dim(E_{-1}(A)) + dim(E_2(A)) = 1 + 1 = 2 < 3$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$, donc A n'est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 2 et $A \in M_3(\mathbb{R})$.

Remarque : le programme de PSI stipule qu'aucune méthode de trigonalisation n'est à connaître.
A partir d'ici, vous êtes donc sensés être aidé.
Il est bon de comprendre ce que l'on fait dans les deux méthodes suivantes.

Formons la réunion des bases des sous-espace propres : on a (e_1, e_2) qui est libre. Il nous manque un vecteur pour faire une base, ou autrement dit, une colonne pour notre matrice de passage P. Il nous manque aussi la troisième colonne de $P^{-1}AP$ ...

Méthode 1 : On complète la base "au hasard"

Posons $e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B' = (e_1, e_2, e_3)$ et P la matrice de la famille B' dans B.

Alors : $det_B(B') = det(P) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & -2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{vmatrix} = -3 \neq 0$ donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

Par construction on a déjà : $Ae_1 = -e_1$ et $Ae_2 = 2e_2$
Cherchons à écrire Ae_3 dans la base B'.

$$Ae_3 = ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=2\\a+b=0\\a-2b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-a\\c=2\\a=1\end{cases}$$

On a donc $Ae_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$. On a déjà vu : $Ae_1 = -e_1$ et $Ae_2 = 2e_2$

Par la formule de changement de bases on a donc :

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & -2 & 0\end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}}$$

Méthode 2 : On part de T ...

Cherchons $e_3 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $A_e3 = 2e_3 + e_2$

$A_e3 = 2e_3 + e_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)e_3 = e_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2b-c=1\\-2b-c=1\\3a-5b-c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-1-2b\\3a-5b+1+2b=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-1-2b\\3a-3b=-3\end{cases}$$

On peut par exemple choisie : $e_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Posons $B' = (e_1, e_2, e_3)$ et P la matrice de la famille B' dans B.

Alors : $det_B(B') = det(P) = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & -2 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 3 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & -2 & -1\end{vmatrix} = 3 \neq 0$

donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$ (on a fait $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$).

On a donc $Ae_3 = e_2 + 2e_3$, $Ae_1 = -e_1$ et $Ae_2 = 2e_2$ et B' est une base.

Par la formule de changement de bases on a donc :

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & -2 & -1\end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}}$$

Enoncé, Exercice 14.4

Déterminer les suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = 8u_n - 9v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 4v_n \end{cases}$

Correction

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a donc $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

Soit P_A le polynôme caractéristique de A.
Alors $P_A(X) = det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-8 & 9 \\ -4 & X+4 \end{vmatrix} = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$

Comme $\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

On pense donc à poser $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ On remarque que : $N^2 = (0)$
Comme I_2 et N commutent alors :
$A^n = (2I_2 + N)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_2)^{n-k} = 2^n I_2 + n2^{n-1} N$

On a donc $A^n = \begin{pmatrix} 2^n + 6n2^{n-1} & -9n2^{n-1} \\ 4n2^{n-1} & 2^n - 6n2^{n-1} \end{pmatrix}$

Par récurrence on a facilement : $X_n = A^n X_0$
$\Rightarrow \begin{cases} u_n = u_0(2^n + 6n2^{n-1}) - 9v_0 n2^{n-1} \\ v_n = 4u_0 n2^{n-1} + v_0(2^n - 6n2^{n-1}) \end{cases}$ avec $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$

On a donc toutes les suites répondant au problème.

Enoncé, Exercice 14.5

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 + 2A + 4I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

a) Montrer que A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ et n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$
b) Montrer que n est pair et que $det(A) = 2^{n/2}$
c) Calculer $tr(A)$

Correction

a) Posons $P(X) = X^2 + 2A + 4$ qui est un polynôme annulateur de A.
Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$.
On peut donc écrire $P(X) = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ avec $\lambda = -1 + i\sqrt{3}$
Le spectre réel de A est donc vide et $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_n(\mathbb{R})}$

De plus P est polynôme annulateur de A, scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C})}$

b) Comme A esrt diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
Comme A est à coefficients réels, ses racines sont conjuguées deux à deux, avec le même ordre de multiplicité.
On a alors $\chi_A(X) = (X-\lambda)^m(X-\overline{\lambda})^m$ et comme χ_A est de degré n alors $n = 2m$ et donc n est paire.
De plus A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda I_{n/2} & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} I_{n/2} \end{pmatrix}$
On a donc $det(A) = (\lambda\overline{\lambda})^m = (|\lambda|^2)^m = |\lambda|^{2m} = |\lambda|^n = 2^n$

Donc $\boxed{n \text{ est pair et } det(A) = 2^n}$

c) Avec le b) on a $tr(A) = m\lambda + m\overline{\lambda} = 2mRe(\lambda) = -m = \frac{-n}{2}$

On a $\boxed{tr(A) = \frac{-n}{2}}$

Enoncé, Exercice 14.6

Soit E un K espace vectoriel de dimension. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que : f et g commutent et f admet n valeurs propres distinctes.

Montrer que f et g sont simultanément diagonalisable, autrement dit qu'il existe une base de E formé de vecteurs, à la fois vecteur propre de f et de g.

Correction

f admet n valeurs propres en dimension n, donc d'après le cours, f est diagonalisable.
De plus, comme les valeurs propres sont simples, les sous-espaces propres sont de dimension 1 et on peut écrire : $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!] \;\; ker(f - \lambda_i Id_E) = Vect(e_i)$
On a alors $B = (e_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ qui est une base de vecteurs propres de f avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ on a : $f(e_i) = \lambda e_i \Rightarrow g(f(e_i)) = \lambda g(e_i))$
Comme $f \circ g = g \circ f$ on a encore : $f(g(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$ donc $g(e_i) \in ker(f - \lambda_i Id_E) = Vect(e_i)$
Donc $\exists \mu_i \in K$, $g(e_i) = \mu_i$

On a donc $M_B(f) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $M_B(g) = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$
$\boxed{B \text{ est une base diagonalisant simultanément } f \text{ et } g.}$