TD libre : Noël

Enoncé, Exercice 13.1 ($\star$)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall P \in E$, $f(P) = (X+2)P' + P$
1°) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2°) Déterminer les éléments propres de f.

Enoncé, Exercice 13.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ Trouver un polynôme annulateur de A, en déduire que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de I_3 et A.

Enoncé, Exercice 13.3 ($\star$)

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E de dimension finie et non nulle. On suppose que : $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Enoncé, Exercice 14.1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? dans $M_2(\mathbb{C})$? Si oui, diagonaliser A.

Enoncé, Exercice 14.2

Diagonaliser dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

Enoncé, Exercice 14.3

Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Enoncé, Exercice 14.4

Déterminer les suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = 8u_n - 9v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 4v_n \end{cases}$

Enoncé, Exercice 14.5 ($\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 + 2A + 4I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

a) Montrer que A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ et n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$
b) Montrer que n est pair et que $det(A) = 2^{n/2}$
c) Calculer $tr(A)$

Enoncé, Exercice 14.6 ($\star$)

Soit E un K espace vectoriel de dimension. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que : f et g commutent et f admet n valeurs propres distinctes.

Montrer que f et g sont simultanément diagonalisable, autrement dit qu'il existe une base de E formé de vecteurs, à la fois vecteur propre de f et de g.

PSI e3A 2025 : exercice 3

Soient r un nombre réel non nul, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.
On note enfin J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Exprimer J^2 en fonction de J.

2. En déduire, selon les valeurs de l'entier naturel ℓ, l'expression de J^ℓ.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

5. Justifier que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Déterminer les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres de la matrice J.

7. Déterminer une matrice diagonale D semblable à J.

8. Démontrer que $\mathrm{Im}(J)$ et $\mathrm{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

9. Justifier que $M_r \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer explicitement deux réels α_k et β_k tels que $(M_r)^k = \alpha_k I_n + \beta_k J$.
On exprimera le résultat sans le symbole $\sum$.

11. Montrer que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

13. Dans cette question, on prend $n = 3$.

13.1. Déterminer une matrice P inversible telle que :

$$\Delta_r = P^{-1} M_r P, \text{ où } \Delta_r = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ avec } \lambda_1 = \lambda_2.$$

13.2. Résoudre le système différentiel : $Y' = \Delta_r Y$.

13.3. En déduire les solutions du système différentiel : $Z' = M_r Z$.