Chapitre 14 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n.
On étudiera un endomorphisme u de $L(E)$ et une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.
A peut, par exemple, être la matrice de u relativement à une base B de E.

1 Généralités

1.1 Objectifs

Trouver une base B de E dans laquelle $M_B(u)$ est la plus simple possible ...
en particulier diagonale ou triangulaire...

1.2 Réductabilité

Définitions. *Soit $u \in L(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors on dit que :*

- *u est* **diagonalisable** *si et seulement si il existe une base B de E telle que $M_B(u)$ soit diagonale.*
- *u est* **trigonalisable** *si et seulement si il existe une base B de E telle que $M_B(u)$ soit triangulaire.*
- *A est* **diagonalisable** *dans $M_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{K})$.*
- *A est* **trigonalisable** *dans $M_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A = PTP^{-1}$ avec T une matrice triangulaire de $M_n(\mathbb{K})$.*
- *Trouver une base B telle que $M_B(u)$ soit diagonale s'appelle* **diagonaliser u**
- *Trouver une base B telle que $M_B(u)$ soit trigonale s'appelle* **trigonaliser u**
- *Trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ s'appelle* **diagonaliser** A
- *Trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in M_n(\mathbb{K})$ trigonale telle que $A = PTP^{-1}$ s'appelle* **trigonaliser** A
- *Diagonaliser ou trigonaliser s'appelle* **réduire**.

Remarque. *Triangulaire, signifie triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure. En général on s'intéresse plus aux matrices triangulaires supérieures.*

1.3 Interprétations

Lemme. *1*
Soit $u \in L(E)$ Alors :
u est diagonalisable si et seulement si E admet une base formée de vecteurs propres de u.

Lemme. *2*
Soit $u \in L(E)$ Alors :
u est trigonalisable
si et seulement si E admet une base $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ telle que : $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $Vect(e_1, e_2, .., e_k)$ est stable par u.

preuves :

2 Diagonalisation en dimension finie

2.1 Remarque préliminaire

On énonce les théorèmes suivants avec un endomorphisme, on a bien sûr les mêmes avec une matrice.

2.2 Conditions nécessaires et suffisantes

2.2.1 Conditions nécessaires et suffisantes : théorème

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $u \in L(E)$.
On écrit $Sp(u) = \{\mu_k \ , k \in [\![1,p]\!]\}$ avec les μ_k dans K et $p \in \mathbb{N}$. p est le nombre de valeurs propres de u avec la convention $Sp(u) = \emptyset$ si $p = 0$.

On note $E_{\mu_k} = ker(u - \mu_k Id_E)$, m_k l'ordre de multiplicité de μ_k comme valeur propre de u et χ_u le polynôme caractéristique de u.

On a alors : u **diagonalisable**

$\Leftrightarrow$ **il existe une base de** E **formée de vecteurs propres de** u
$\Leftrightarrow E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_{\mu_k}$
$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{p} dim(E_{\mu_k}) = n = dim(E)$
$\Leftrightarrow \chi_u$ **est scindé et** $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $dim(E_{\mu_k}) = m_k$
$\Leftrightarrow u$ **admet un polynôme annulateur scindé simple**
$\Leftrightarrow \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \mu_k)$ **est un polynôme annulateur de** u

2.2.2 preuve :

2.2.3 Autres formulations

Théorème . 1
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous espaces propres est égale à E.

Théorème . 2
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres est égale à la dimension de E.

Théorème . 3
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous espace propre associé est égale à sa multiplicité.

Théorème . 4
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Corollaire. *Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il admet $\prod\limits_{\lambda \in sp(u)} (X - \lambda)$ comme polynôme annulateur.*

2.3 Conditions suffisantes

Théorème . 5
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Théorème . 6
Une matrice **symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée** *pour le produit scalaire canonique.*

preuve : H.P. pour le théorème 6

2.4 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs : exemples : symétrie et projection

2.5 Endomorphisme induit

Théorème . Si u est un endomorphisme diagonalisable de $L(E)$ et si F est un sous espace vectoriel de E stable par u alors $u|_F \in L(F)$ est diagonalisable.

preuve :

2.6 Méthode générale pour diagonaliser

2.6.1 Méthode

On suit les étapes suivantes :

1. On calcul le polynôme caractéristique.
2. On en déduit le spectre.
3. On cherche les sous espaces propres.
4. Si la somme des sous espaces propres vaut l'espace totale la matrice (ou l'endomorphisme) est diagonalisable. On obtient alors une base diagonalisante par réunion des bases des sous espaces propres.

2.6.2 Exemple 1

Diagonalisation de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

2.6.3 Exemple 2

Diagonalisation de $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

3 Trigonalisation en dimension finie

3.1 Remarque préliminaire

On énonce les théorèmes suivants avec un endomorphisme, on a bien sûr les mêmes avec une matrice.
Contrairement à la diagonalisation aucune méthode de trigonalisation n'est exigible en PSI.

3.2 Le théorème

Théorème . *Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie* **est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur K.**

preuve : non exigible

Remarque. *Ce qui donne pour une matrice :*
$A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ si et seulement si le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire. *Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$*

preuve :

3.3 Un autre théorème

Théorème . *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice trigonalisable alors $tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ avec les λ_k qui sont les valeurs propres de A.*

Remarques. *Si λ_i est valeur propre d'ordre p on compte λ_i p fois.*
On peut l'appliquer aux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ et donc aussi aux matrices de $M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ en considérant les valeurs propres complexes ...

preuve :

3.4 Méthode et exemples

3.4.1 Méthode

On suit les étapes suivantes :

1. On calcul le polynôme caractéristique. Si il est scindé on peut trigonaliser.
2. On en déduit le spectre.
3. On cherche les sous espaces propres.
4. Hors programme

3.4.2 Exemple

Trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$