PSI* 2025-2026

A rendre le jeudi 22 janvier 2026

Devoir à la maison n°8 de Mathématiques

Code couleur :	noir	exo 1 et exo 2 pour réviser, après plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile (ou 5/2 uniquement)

Exercice 0

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ et calculer A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 1 : (e3a 2020 PC)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2) Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3) Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : (oral ccINP PSI 2025)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u \in L(E)$.
On note B la base canonique de E. On note A la matrice de u relativement à B.
On note u^* l'endomorphisme admettant A^T comme matrice relativement à B.

1) Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2 \ , \ < u(x), y > = < x, u^*(y) >$

2) Montrer que si un sous-espace vectoriel F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3) a) A et A^T sont-elle diagonalisable ?

3) b) Trouver les sous-espaces vectoriel stable par u.

PROBLÈME 1 : problème 2 de ccINP PSI 2025

Inégalité et matrices de Hadamard

L'objectif de ce problème est d'établir l'inégalité de Hadamard reliant le déterminant d'une matrice et le produit des normes euclidiennes de ses vecteurs colonnes. Nous étudierons ensuite quelques propriétés de la famille des matrices de Hadamard qui réalisent l'égalité dans cette inégalité.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1 . On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels.
Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on note $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$ le produit scalaire canonique de X et Y.
Étant donné n nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont formés par les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, est désignée par $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives à coefficients réels et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives à coefficients réels.

Partie I - Inégalité arithmético-géométrique

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. On pose $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $G = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}$. Dans cette partie, nous allons montrer que $G \leqslant A$, avec égalité si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.
On remarque que dans le cas où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous nuls, l'égalité est immédiate. On suppose donc dans la partie I que les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont non tous nuls.

Q21. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geqslant 1 + x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Q22. Montrer que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$:

$$\frac{\lambda_i}{A} \leqslant \exp\left(\frac{\lambda_i}{A} - 1\right).$$

Q23. En déduire que $G \leqslant A$.

Q24. Montrer que $G = A$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

Partie II - Inégalité de Hadamard

L'objectif de cette partie est de démontrer que pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|\det(M)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Hadamard.
Dans les questions Q25 à Q30, on considère $S = (s_{i,j}) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q25. Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et rappeler la relation qui lie $\det(S)$ et les valeurs propres de S, puis $\operatorname{Tr}(S)$ et les valeurs propres de S.

Q26. En déduire que :

$$(\det(S))^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(S).$$

Q27. Montrer que $(\det(S))^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(S)$ si et seulement s'il existe $\lambda > 0$, tel que $S = \lambda I_n$.

Q28. Montrer que pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $s_{j,j} > 0$.
On considère la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}\left(\sqrt{s_{1,1}}, \ldots, \sqrt{s_{n,n}}\right)$.

Q29. Montrer que la matrice $D^{-1}SD^{-1}$ a pour coefficient général $\left(\frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i}s_{j,j}}}\right)$ avec $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$. En déduire que $D^{-1}SD^{-1}$ est symétrique définie positive et que ses éléments diagonaux valent 1.

Q30. En utilisant la question **Q29**, montrer que :

$$\det(S) \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_{j,j},$$

avec égalité si et seulement si S est diagonale.

Q31. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $M^\top M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q32. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qu'on ne suppose pas inversible. On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de M. Déduire des questions précédentes que l'inégalité (3) est valide pour M, avec égalité si et seulement si les vecteurs colonnes $C_1, \cdots, C_n$ sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q33. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|m_{i,j}| \leqslant 1$. Montrer alors que :

$$|\det(M)| \leqslant n^{\frac{n}{2}},$$

avec égalité si et seulement pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|m_{i,j}| = 1$ et $M^\top M = nI_n$.

Partie III - Matrices de Hadamard

Dans cette partie, nous étudions l'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices de Hadamard de taille n défini par :

$$\mathcal{H}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^\top M = nI_n \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, |m_{i,j}| = 1\right\}.$$

Par exemple, la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{H}_2$.
Notons $H = \{n \in \mathbb{N}^* / \mathcal{H}_n \neq \emptyset\}$. L'ensemble H n'est pas connu actuellement. L'un des objectifs de cette partie est de donner une condition nécessaire sur n pour que $n \in H$.

On admet que si un ensemble $\mathcal{H}_n$ est non vide, alors il contient au moins une matrice de Hadamard dont la première colonne et la première ligne sont constituées uniquement de 1 .
Soit $n \in H$ et soit $M \in \mathcal{H}_n$.

Q34. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}. A-t-on $M^{-1} \in \mathcal{H}_n$?

Q35. Montrer que la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{H}_{2n}$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}, 2^p \in H$.

On suppose désormais que $n > 2$ et que la première colonne et la première ligne de M ne sont constituées que de 1 .

On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice M. On a en particulier $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q36. En considérant $\langle C_1, C_2 \rangle$, montrer que n est pair.

Q37. On note :

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = 1 \text{ et } m_{i,3} = 1\}\,; \\ y &= \operatorname{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = 1 \text{ et } m_{i,3} = -1\}\,; \\ z &= \operatorname{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = -1 \text{ et } m_{i,3} = 1\}\,; \\ t &= \operatorname{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = -1 \text{ et } m_{i,3} = -1\}\,. \end{aligned}$$

Exprimer $\langle C_1, C_2 \rangle, \langle C_1, C_3 \rangle$ et $\langle C_2, C_3 \rangle$ en fonction de x, y, z et de t.
En déduire un système linéaire de 4 équations d'inconnues x, y, z, t.

Q38. En déduire que n est un multiple de 4 .

Nous venons de démontrer que:

- si n est une puissance de 2 , alors n appartient à H;
- si $n > 2$ et n n'est pas un multiple de 4 , alors n n'appartient pas à H.

Hadamard a conjecturé que $n \in H$ si et seulement si n est un multiple de 4.
La question est encore ouverte aujourd'hui.

FIN

PROBLÈME 2 : Mines-Ponts 2025 PSI-PC math I

Notations et définitions.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbf{N}^*, \mathbf{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathbf{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n. On rappelle que deux matrices A et B de $\mathbf{M}_n$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

Partie 1. Polynômes réciproques.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$. Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier $k, 0 \leq k \leq p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

2. Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.

   Écrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier $i, 1 \leq i \leq d, \lambda_i$ est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.

3. Soit Q un polynôme de degré p. On dit que Q est antiréciproque si

   $$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

   Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

   Soit R un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ ayant la propriété suivante : Toute racine a de R est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4. Démontrer que le produit des racines de R, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs $1 \text{ou} -1$. On pourra remarquer que l'égalité $a = \frac{1}{a}$ n'a lieu que pour $a = 1 \text{ou} -1$.

5. En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Le cas diagonalisable.

Soit A une matrice appartenant à $\mathbf{GL}_n$.

6. Soit x un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de $x, \det A$ et $\det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$.

7. On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que χ_A est soit réciproque, soit antiréciproque.

8. Soit $B \in \mathbf{M}_n$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

9. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse (bien que son polynôme caractéristique $(X-2)^2\left(X-\frac{1}{2}\right)^2$ soit réciproque). On pourra déterminer les espaces propres de B et B^{-1} pour la valeur propre 2 .

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème se propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.

Partie 3. Produits de matrices de symétries.

On dit qu'un endomorphisme f d'un C -espace vectoriel E est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathbf{M}_n$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

10. Démontrer que si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

11. Si une matrice A est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même de toute matrice semblable à A ?

    Soit B et C deux matrices de $\mathbf{GL}_n$. Soit $A \in \mathbf{M}_{2n}$ la matrice définie par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$$

12. Soit S_1 la matrice par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$$

    où P, Q sont deux éléments de $\mathbf{GL}_n$. Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices S_1 et $S_2 = S_1A$ soient des matrices de symétries.

13. En déduire que si C est semblable à B^{-1}, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$.

14. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est la matrice N ci-après :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

15. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$. Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de N et de λ la matrice N' telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n + N'$

16. Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ on pose

$$\begin{cases} s_1(P) = P(-X) \\ s_2(P) = P(1-X) \\ g(P) = P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

On définit ainsi trois endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ (il n'est pas demandé de le prouver).

17. Calculer s_1^2, s_2^2 et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de g et $Id_{\mathbf{C}_{n-1}[X]}$.

18. Soit P un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de P.

19. Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

Soit A une matrice de $\mathbf{GL}_n$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant : A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes) et r ainsi que les $n_i, 1 \leq i \leq r$, des entiers naturels non nuls.

De plus la matrice A' est unique à l'ordre près des blocs.

20. D Démontrer que A^{-1} est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

21. En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que A est un produit de deux matrices de symétries.