Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°7

EXERCICE 1

a) • On pose : $\begin{array}{cccc} f & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{xln(x)}{1+x^3} \end{array}$

Alors f est continue sur $]0,+\infty[$ et donc A pose problème en 0 et en $+\infty$.

• En 0

Par limite du cours on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 et donc $\int\limits_0^1 f(x)dx$ est convergente.

• En $+\infty$

$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} \sim \frac{xln(x)}{x^3}x^{3/2} = \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit donc $f(x) = o(\frac{1}{x^{3/2}})$

Comme $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (par Riemann) , on a, par négligeabilité, f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

• $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int\limits_0^1 f(x)dx$ sont convergentes donc $\boxed{A \text{ est convergente.}}$

b) Pour $n > 1$ on a : $\frac{\frac{(ln(n))^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{(ln(n))^2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit donc $\frac{(ln(n))^2}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$

Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann absolument convergente, alors, par négligeabilité, $\boxed{\sum \frac{(ln(n))^2}{n^2} \text{ convergente.}}$

c) On pose $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(z) = (-1)^n \frac{sin(n)+2^n}{8^n} z^{2n+1}$

On a, pour $z \neq 0$: $|a_n(z)| \sim \frac{2^n}{8^n} |z|^{2n+1} \sim |z| \, (\frac{|z|^2}{4})^n$

$\sum (\frac{|z|^2}{4})^n$ est alors une série géométrique de raison $\frac{|z|^2}{4}$ convergente si et seulement si $\frac{|z|^2}{4} < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$

Par la règle de l'équivalent : $\sum a_n(z)$ convergente $\Leftrightarrow |z| < 2$

On en déduire que $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum (-1)^n \frac{sin(n)+2^n}{8^n} z^{2n+1} \text{ vaut } R = 2}$

d) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ on pose $u_n(z) = \frac{n!}{(2n)!} z^n$. Alors $u_n(z) \neq 0$ et

$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!z^n}\right| = \left|\frac{(n+1)z}{(2n+2)(2n+1)}\right| \sim \left|\frac{z}{4n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Par la règle de D'Alembert, comme 0<1, alors $\sum u_n(z)$ est toujours convergente et donc $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum \frac{n!}{(2n)!} z^n \text{ vaut } R = +\infty}$

e) On distingue deux cas.

CAS 1 : $|a| \leq 1$

Alors $\frac{a^n+n}{n+1} \sim 1$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries entières : $\sum \frac{a^n+n}{n+1} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum 1z^n$ qui est une série entière du cours de rayon de convergence 1.

CAS 2 : $|a| > 1$

Alors $\frac{a^n}{n} \sim 1$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries entières : $\sum \frac{a^n+n}{n+1} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum \frac{a^n}{n} z^n$.

Par dérivation, cette série entière a même rayon de convergence que : $\sum a^n z^n = \sum (az)^n$

On reconnaît une série géométrique de raison az, convergente si et seulement si $|az| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{|a|}$

Le rayon de convergence de $\sum \frac{a^n+n}{n+1} z^n$ vaut alors $R = \frac{1}{|a|}$

$(a \neq 0)$

Bilan : $\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{a^n+n}{n+1} z^n \text{ vaut : } R = \begin{cases} \frac{1}{|a|} \text{ si } |a| > 1 \\ 1 \text{ si } |a| \leq 1 \end{cases}}$

On peut résumer ceci en $R = Min(1, \frac{1}{|a|})$

EXERCICE 2

On pose : $\begin{array}{rcl} g : R & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

On saut d'après le cours que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

On remarque que cette dernière formule est encore valable en 0, puisque l'on a posé $g(0) = 0$

On a donc g qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a posé g de telle sorte que : $f = g^2$ et donc $\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme produit de fonctions $C\infty$.

EXERCICE 3

a) • $S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \sim \frac{1}{n^2} > 0$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right|$ est convergente par la règle de l'équivalent.

On a donc $S(1)$ absolument convergente et donc convergente et donc,
comme $R = sup(\{x \geq 0$, $S(x)$ convergente $\})$ on a que $R \geq 1$

• Par comparaison puissance-exponentielle $|x| > 1 \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Comme $R = sup(\{x \geq 0$, $(\frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\})$ alors : $R \leq 1$

On a $R \geq 1$ et $R \leq 1$ donc $\boxed{R = 1}$

b) Par définition du rayon de convergence on sait déjà que S est définie sur $]-R, R[$ et que $D \subset [-R, R]$
Il reste à voir ce qui se passe en R et $-R$. On a vu au a) que $S(1)$ était convergente donc $1 \in D$. De même $-1 \in D$.

Bilan : $\boxed{D = [-1, 1]}$

c) S est C^∞ sur $]-R;R[$ comme série entière.
On peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. On a alors $\forall x \in]-R;R[\ ,\ S'(x) = \frac{d}{dx}(\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{d}{dx}(\frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1} = -\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} x^p$

On reconnaît une série entière du cours et on a alors : $\forall x \in]-1;1[\quad S'(x) = ln(1+x)$

En intégrant par parties, avec des fonctions dérivables, l'expression trouvée on obtient sur $]-1;1[$:
$S(x) = [(x+1)ln(1+x)] - \int (x+1)\frac{1}{x+1}dx = (x+1)ln(x+1) - x + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$
Avec l'expression ci-dessus on obtient en $x=0$: $S(0) = \mu$
Avec l'expression sous forme de série entière on obtient : $S(0) = 0$ et on a donc $\mu = 0$

On a finalement : $\boxed{\forall x \in]-1;1[\ ,\ S(x) = (x+1)ln(1+x) - x}$

d) Si on pose : $\forall n \geq 2$ et $\forall x \in [-1,1]\ ,\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$
Alors $||f_n||_\infty = \sup\limits_{x_i n[-1,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, alors, par équivalent $\sum ||f_n||_\infty$ est convergente, et donc $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1,1]$

Comme la convergence uniforme conserve la continuité et que les f_n sont continues, on a que :
$\boxed{S \text{ est constinue sur } D = [-1,1]}$

e) • Comme S est continue en 1, alors :
$S(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ((x+1)ln(1+x) - x) = 2ln(2) - 1 = ln(4) - 1$
On en déduit $S(1) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = ln(4) - 1$ et on remarque que l'expression du c) est valable en $x = 1$

• De même, S est continue en -1 et donc :
$S(-1) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} S(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} ((x+1)ln(1+x) - x) = 0 - (-1) = 1$

On a donc : $\boxed{S(x) = \begin{cases} (x+1)ln(1+x) - x & \text{si } x \in]-1,1] \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}}$

EXERCICE 4 : exercice de e3A PC 2025

1) Si y est une solution de (E) alors on peut évaluer (E) en $x=0$, et on a :
$0y''(0) + xy'(0) - 1y(0) = 0$ donc $\boxed{y(0) = 0}$

2.1) • On a déjà : $a_0 = f(0) = 0$ par la question 1).
Comme on suppose que $f'(0) = 1$ alors $a_1 = 1$

• Reste à montre la formule de récurrence.

Une série entière est C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et on peut la dériver terme, alors :
$\forall x \in]-R;R[\ ,\ \begin{cases} f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$

On a alors :

f solution de E sur $]-R,R[$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[\ ,\quad x^2 f''(x) + x f'(x) - (x^2+x+1)f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[\ ,\quad x^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (x^2+x+1) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[\ ,\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0$

Changement d'indice $p = n+1$ dans l'avant dernière somme, $p = n+2$ dans la dernière et $p = n$ dans les autres.

f solution de E sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[\ ,\quad \sum\limits_{p=0}^{+\infty} p(p-1)a_p x^p + \sum\limits_{p=0}^{+\infty} p a_p x^p - \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_p x^p - \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_{p-1} x^p - \sum\limits_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^p = 0$

On fait attention aux premiers termes, on tient compte de $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on regroupe les termes pour $p \geq 2$

f solution de E sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[\ ,\quad 0+0+0+a_1 x - a_0 - a_1 x - a_0 x + \sum\limits_{p=2}^{+\infty} [p(p-1)a_p x^p + p a_p - a_p - a_{p-1} x^p - a_{p-2}] x^p = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[\ ,\quad \sum\limits_{p=2}^{+\infty} [(p(p-1) + p - 1)a_p - a_{p-1} - a_{p-2}] x^p = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[\ ,\quad \sum\limits_{p=2}^{+\infty} [(p^2-1)a_p - a_{p-1} - a_{p-2}] x^p = 0$

On utilise maintenant l'unicité du DSE_0 avec $R > 0$ pour obtenir :

$\forall p \geq 2\ ,\ (p^2-1)a_p - a_{p-1} - a_{p-2} = 0$

En posant $n = p$ et en reprenant les résultats du début de questions :

$$\boxed{\begin{cases} \forall n \geq 2\ ,\ (n^2-1)a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}}$$

2.2) Montrons par une récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \geq 1\ ,\ |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}$

Initialisation : $a_1 = 1$ et $\frac{1}{(1-1)!} = 1$ donc $|a_1| \leq \frac{1}{(1-1)!}$ vraie.

$(4-1)a_2 - a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow 3a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{(2-1)!} = \frac{1}{2}$ donc $|a_2| \leq \frac{1}{(2-1)!}$ vraie.

Hérédité : On suppose $|a_{n-1}| \leq \frac{1}{(n-2)!}$ et $|a_{n-2}| \leq \frac{1}{(n-3)!}$

Alors $(n^2-1)a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ implique, par l'inégalité triangulaire : $(n^2-1)\,|a_n| \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}|$

Et, avec les hypothèses de récurrences : $(n^2-1)\,|a_n| \leq \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} = \frac{1}{(n-3)!}(\frac{1}{n-2} + 1) = \frac{1}{(n-3)!}\frac{n-1}{n-2}$

$\Rightarrow (n-1)(n+1)\,|a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!}\frac{n-1}{n-2}$

$\Rightarrow (n+1)\,|a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!}\frac{1}{n-2}$

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!}\frac{1}{(n-2)(n+1)}$

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!}\frac{1}{(n-2)(n-1)}$ car $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n-1}$

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1\ ,\ |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}}$

2.3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = xexp(x)$ et on sait que çà converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après le cours.

Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et, par comparaison avec l'inégalité du 2.2) : $R = +\infty$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}.}$

3.1) $z(0) = 0y(0)e^0 = 0$
Comme y est C^2 alors z est C^2
Pour $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = y(x)e^x + xy'(x)e^x + xy(x)e^x = (1+x)y(x)e^x + xy'(x)e^x$ donc $z'(0) = y(0) = 0$ d'après 1.)

On a donc : $\boxed{z(0) = z'(0) = 0}$

3.2) z est C^2 et $\forall x \in \mathbb{R}$
$z''(x)$
$= y(x)e^x + (1+x)y'(x)e^x + (1+x)y(x)e^x + [y'(x)e^x + xy''(x)e^x + xy'(x)e^x]$
$= [xy''(x) + (2+2x)y'(x) + (2+x)y(x)]e^x$
Alors : $xz''(x) - (2x+1)z'(x)$
$= x[xy''(x) + (2+2x)y'(x) + (2+x)y(x)]e^x - (2x+1)[(1+x)y(x)e^x + xy'(x)]e^x$
$= e^x\Big(x^2y''(x) + (2x+2x^2-2x^2-x)y'(x) + (2x+x^2-(2x+1)(1+x))y(x)\Big)$
$= e^x\Big(x^2y''(x) + xy'(x) + (2x+x^2-2x^2-3x-1)y(x)\Big)$
$= e^x\Big(x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2+x+1)y(x)\Big)$
$= 0$ car y est solution de (E)

On a donc : $\boxed{z' \text{ est solution de } (F)}$

3.3.1) Soit $I = \mathbb{R}_+^*$. Alors :
$\displaystyle\int (2+\frac{1}{x})dx = 2x + ln(|x|) = 2x + ln(x)$ car $x > 0$
(F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène, à coefficient continue (coefficient en u' non nul), donc, d'après le cours, les solutions de (F) sur I s'écrivent : $u(x) = aexp(2x + ln(x) = axe^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Les solutions sur } \mathbb{R}_+^* \text{ s'écrivent : } u(x) = axe^{2x} \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$

3.3.2) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} axe^{2x} = 0$ donc $\boxed{\text{les fonctions sont prolongeables par continuité en } 0}$, en posant $u(0) = 0$

3.4) Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ U(x) = cxe^{2x}$
Alors U est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $U'(x) = c(1+2x)e^{2x}$.
Alors : $U'(x) - (2+\frac{1}{x})U(x) = c(1+2x)e^{2x} - (2+\frac{1}{x})cxe^{2x} = ce^{2x}\Big(1+2x-2x-1\Big) = 0$

Donc : $\boxed{x \mapsto cxe^{2x} \text{ est solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}^*}$

3.5) Comme z' est solution de (F) sur $\mathbb{R}$, alors, en admettant le résultat de l'énoncé (que l'on sait capable, en PSI, de démontrer) : $\exists a \in \mathbb{R}\ ,\ z'(x) = 4axe^{2x}$
Par intégration par parties :
$z(x) = [4ax\frac{e^{2x}}{2}] - \int 4a\frac{e^{2x}}{2}dx = 2axe^{2x} - ae^{2x} + \theta = a(2x-1)e^{2x} + \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$
Mais $z(0) = 0$ donc $\theta = a$

Finalement : $\boxed{\exists a \in \mathbb{R}\ ,\ z(x) = a(2x-1)e^{2x} + a}$

3.6) f est une solution C^2 de (E) sur $\mathbb{R}$, donc d'après ce qui précède :
$\exists a \in \mathbb{R}\ ,\ a(2x-1)e^{2x} + a = xf(x)e^x$
Donc, pour $x \neq 0\ ,\ f(x) = a\Big((2 - \frac{1}{x})e^x + \frac{1}{xe^x}\Big) = a\Big(2e^x - 2\frac{1}{x}\frac{e^x - e^x}{2}\Big) = 2a\Big(e^x - \frac{sh(x)}{x}\Big)$

Au voisinage de 0 : $f(x) = 2a\Big(1 + x + o(x) - \frac{x + o(x^2)}{x}\Big) = 2a(1 + x - 1 + o(x)) = 2ax + o(x)$
Comme f est C^∞ on a aussi : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$, donc, par unicité du DL : $2a = f'(0) = 1$ par la question 2.)
Il reste $f(x) = e^x - \frac{sh(x)}{x}$ pour $x \neq 0$

On a alors : $\boxed{f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{sh(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

EXERCICE 5 : exercice de e3A MP 2025

1.) On sait d'après le cours que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$

2.) Comme $n! \geq 1$ alors : $0 \leq \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n!}$
On sait (d'après 1.) que $\sum \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$
Donc, par comparaison : $\sum \frac{x^n}{(n!)^2}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

3.) f est une série entière de rayon de convergence $+\infty$, donc $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$

4.) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Comme f est C^∞ sur $[a, b]$ ont peut appliquer le théorème des accroissements finis et obtenir :
$\forall (x, y) \in [a, b]^2\ ,\ \exists c \in]a, b[\ ,\ f(x) - f(y) = f'(x)(x - y)$

Mais f' est continue sur $[a, b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes $\exists M > 0\ ,\ \forall c \in [a, b]\ ,\ |f'(c)| \leq M$

Appliquer à l'inégalité ci-dessus : $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$
On a donc f M lipschitzienne sur $[a, b]$.

On a donc $\boxed{f \text{ lipschitzienne sur tout segment de } \mathbb{R}}$

5.) On peut dériver une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. Ici, on peut donc dériver f sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\frac{x^{n-1}}{n!}$

Mais, puisque $x \geq 0$ et $\frac{1}{(n-1)!} \leq 1$, on a : $f'(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$

Bilan : $\boxed{\forall x \geq 0\ ,\ f'(x) \leq e^x}$

6.) Soit x et y deux réels positifs.
Toujours avec le théorème des accroissements finis $\exists c \in [x,y]$, $f(x)-f(y) = f'(c)(x-y)$

En prenant la valeur absolue : $|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\,|x-y|$

Comme $f'(c) \geq 0$ (somme de termes positifs) et que $f'(c) \leq e^c$ alors : $|f(x)-f(y)| \leq e^c\,|x-y|$

Comme $c \in [x,y]$ alors $e^c \leq e^z$ et on a bien : $\boxed{\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2 \ , \ |f(x)-f(y)| \leq e^z\,|x-y|}$

7.) f est C^∞ donc par la formule de Taylor-Young, pour x au voisinage de 0 : $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$
Mais $f(0) = \frac{1}{0!^2} = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{1!^2} = 1$ donc $f(x) = 1 + x + o(x) \Rightarrow f(x) - 1 = x + o(x) \sim x$

Donc, au voisinage de 0 : $\boxed{f(x) - 1 \underset{x=0}{\sim} x}$

8.) On a $\forall t > 0$, $f(t) \geq 1$ (1 est le premier terme de la somme et les autres sont positifs)
Donc $t \mapsto \frac{1}{t(f(t))^2}$ est bien définie sur $]0,+\infty[$ et même de classe C^∞

g est donc une primitive d'une fonction C^∞, donc : $\boxed{g \text{ est } C^\infty \text{ sur }]0,+\infty[}$

9.) $\frac{1}{t(f(t))^2} \geq 0$ sur $]0,+\infty[$, donc le signe de g dépend de la position de x par rapport à 1.

On a : $\boxed{\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si } x > 1 \\ g(x) < 0 & \text{si } x < 1 \\ g(1) = 0 \end{cases}}$

10.) On remarque que : $\forall x > 0$, $\int\limits_1^x \frac{1}{t} dt = ln(x)$

Donc $g(x) - ln(x) = \int\limits_1^x \frac{1}{t(f(t)^2} dt - \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt = \int\limits_1^x [\frac{1}{t(f(t))^2} - \frac{1}{t}] dt = \int\limits_1^x \frac{1-(f(t))^2}{t(f(t))^2} dt$

On pose $\forall t > 0$, $g(t) = \frac{1-(f(t))^2}{t(f(t))^2}$
par la question 7.), au voisinage de 0 :
$g(t) = \frac{1-(1+t+o(t))^2}{t(f(t))^2} = \frac{1-1-2t+o(t)}{t(f(t))^2} = \frac{-2t+o(t)}{t(f(t))^2} = \frac{-2+o(1)}{(f(t))^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -2$ (puisque f continue en 0 et $f(0) = 1$)
g est donc prolongeable par continuité en 0 et donc $\int\limits_0^1 g(t)dt$ est convergente.

On a donc $g(x) - ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 g(t)dt$

Donc $g(x) - ln(x) = O(1)$ et donc : $\boxed{g(x) \underset{x=0}{\sim} ln(x)}$

11.) Pour $t > 0$: $f(t) = 1 + t + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{t^n}{(n!)^2}}_{>0} > 1 + t$, donc : $\boxed{\forall t > 0 \ , \ f(t) > 1 + t}$

12.) De 11.) on déduit pour $t > 0$ que : $0 \leq \frac{1}{t(f(t))^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2}$

Comme $\frac{1}{t(1+t)^2} \sim \frac{1}{t^3}$ et que $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors, par équivalent, $t \mapsto \frac{1}{t(f(t))^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t(f(t))^2} dt$ est convergente.

On a alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t(f(t))^2} dt$

Bilan : $\boxed{g \text{ possède une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$

13.) On a $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{(1+X)^2}$

Alors, par équivalences :

$\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{(1+X)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{a(X+1)^2 + bX(1+X) + cX}{X(1+X)^2}$

$\Leftrightarrow 1 = a(X+1)^2 + bX(1+X) + cX$

$$\Leftrightarrow 1 = (a+b)X^2 + (2a+b+c)X + a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a+b+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a+b+c = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

On a donc : $\boxed{\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{1+X} - \frac{1}{(1+X)^2}}$

14.) En intégrant $\frac{1}{t(f(t))^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2}$ entre 1 et $x > 1$, on a , avec 13.) :

$$g(x) \leq \int\limits_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt \Rightarrow g(x) \leq [ln(t) - ln(1+t) + \frac{1}{1+t}]_1^x \Rightarrow g(x) \leq ln(x) - ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 0 + ln(2) - \frac{1}{2}$$

On en déduit : $\boxed{\forall x > 1 \ , \ g(x) \leq ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{1+x} + ln(2) - \frac{1}{2}}$

15.) • Sur $]0, 1]$ on a $g(x) \leq 0 \leq ln(2)$

• Pour $x > 1$. Comme $\frac{x}{x+1} < 1$ alors $ln(\frac{x}{x+1}) < 0$ De plus $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} < 0$

Alors l'inégalité du 14.) donne : $\forall x > 1 \ \ g(x) \leq ln(2)$

• Bilan : $\boxed{g \text{ est majorée par } ln(2) \text{ sur }]0, +\infty[}$

Centrale PC 2025, Mathémétiques 2

Q1) Dans cette question $g = sin$. Donc g est C^1 et on peut appliquer le théorème des accroissements finis et obtenir : $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$, $g(t) - g(s) = g'(u)(t-s)$ avec $u \in [s,t]$ ou $u \in [t,s]$
Comme $g' = cos$ alors, $|g'(u)| \leq 1$ et donc $|g(t) - g(s)| \leq |t-s|$
Donc si $|t-s| \leq h$ alors $|g(t) - g(s)| \leq h$
Comme $\omega_g(h) = \sup\limits_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|$ on en déduit que $w_{\sin}(h)$ est bien défini et que : $\boxed{\omega_{\sin}(h) \leq h}$

Q2) a) • Si $h > 0$ il existe des couples $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|t-s| \leq h$ et donc $\omega_g(h)$ est le sup d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc $\omega_g(h)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Il reste à voir que $\omega_g(h)$ est fini.

• Mais g est continue sur $[0, 2\pi]$ donc g est bornée sur $[0, 2\pi]$ et il existe $\exists M > 0$, $|g(x)| \leq M$
Comme g est 2π périodique alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq M$
Par inégalité triangulaire : $|g(t) - g(s)| \leq |g(t)| + |g(s)| \leq 2M$
En passant au sup, on a : $\omega_g(h) \leq 2M$ et donc $\omega_g(h) < +\infty$ et $\omega_g(h)$ est donc un réel.

Bilan : $\boxed{\text{Si } g \in C^0_{2\pi} \text{ alors } \omega_g(h) \text{ est un réel bien défini.}}$

Q2) b) • Si de plus g est C^1 alors avec le théorème des accroissements finis :
$|g(t) - g(s)| = |g'(u)| \, |t-s|$

$||g'||_\infty$ est bien définie car g' est continue et 2π périodique (comme pour g au 2)a)),
donc si de plus $|t-s| \leq h$ alors : $|g(t) - g(s)| \leq ||g'||_\infty \, h$

En passant au sup, on a donc : $\boxed{\forall h > 0 \ , \ \omega_g(h) \leq ||g'||_\infty \, h}$

• On a : $0 \leq \omega_g(h) \leq ||g'||_\infty \, h$, donc par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{h \to 0^+} \omega_g(h) = 0}$

Q3) a) Si $h \leq h'$ alors $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \ , \ , |s-t| \leq h\} \subset \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \ , \ , |s-t| \leq h'\}$
Donc, en passant au *sup* : $\omega_h(g) \leq \omega_{h'}(g)$

On a donc : $\boxed{h \leq h' \Rightarrow \omega_h(g) \leq \omega_{h'}(g)}$

Q3) b) • Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|s-t| \leq h + h'$

Comme les quantités étudiées sont symétriques en s et t, on peut supposer, quitte à échanger s et t, que : $t \leq s$
On a donc : $0 \leq s - t \leq h + h'$ et on distingue alors deux cas :

Cas 1 : $0 \leq s - t \leq h$
Alors comme $0 \leq s - t \leq h$ on a $|g(s) - g(t)| \leq \omega_g(h)$ et comme $\omega_g(h') \geq 0$ on a :
$|g(s) - g(t)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$

Cas 2 : $h < s-t \leq h+h'$
Alors, en retranchant h à l'inégalité ci-dessus : $0 < s-t-h \leq h'$
On a alors : $|g(s)-g(t)| = |g(s)-g(s-h)+g(s-h)-g(t)|$ et par inégalité triangulaire :
$|g(s)-g(t)| \leq |g(s)-g(s-h)| + |g(s-h)-g(t)|$
Mais $s-(s-h) = h \leq h$ donc $|g(s)-g(s-h)| \leq w_g(h)$ et $(s-h)-t \leq h'$ (voir ci-dessus) et on donc $|g(s-h)-g(t)| \leq \omega_g(h')$ et on a donc $|g(s)-g(t)| \leq \omega_g(h)+\omega_g(h')$

- Dans tout les cas on a : $|g(s)-g(t)| \leq \omega_g(h)+\omega_g(h')$ pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $|s-t| \leq h+h'$

En passant au sup, on obtient donc : $\boxed{\omega_g(h+h') \leq \omega_g(h)+\omega_g(h')}$

Q3) c) • Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$

Initialisation : pour $n = 1$, le résultat est évident puisque si $n = 1$ alors : $\omega_g(nh) = n\omega_g(h)$

Hérédité : On suppose le résutat vrai au rang n et on le montre au rang $n+1$.
On a alors : $\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$
Mais en utilisant le b) : $\omega_g((n+1)h) = \omega_g(nh+h) \leq \omega_g(nh)+\omega_g(h) \leq n\omega_g(h)+\omega_g(h) = (n+1)\omega_g(h)$
On a bien le résultat au rang $n+1$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)}$

- Si $\lambda > 0$ alors par définition de la partie entière : $\lfloor \lambda \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \lambda \rfloor + 1 \leq \lambda + 1$

On a donc : $\lambda h \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)h$ et avec le a) : $\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h)$
On utilise maintenant le b) pour avoir : $\omega_g(\lambda h) \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_g(h)$
Et comme $(\lfloor \lambda \rfloor + 1) \leq \lambda + 1$ alors : $\omega_g(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega_g(h)$

On a bien : $\boxed{\forall \lambda > 0 \ , \ \omega_g(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega_g(h)}$

Q4) Soit $g \in C^0_{2\pi}$. Par la relation de Chasles : $\int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)dt = \int\limits_{-\pi+x}^{-\pi} g(t)dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int\limits_{\pi}^{\pi+x} g(t)dt$
On effectue le changement de variable $u = t+\pi$ dans la première intégrale et le changement de variable $u = t-\pi$ dans la dernière intégrale.
On a alors : $\int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)dt$
$= \int\limits_{x}^{0} g(u-\pi)du + \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int\limits_{0}^{x} g(u+\pi)dt$
$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int\limits_{0}^{x}(g(u+\pi)-g(u-\pi))dt$ mais $g(u+\pi)-g(u-\pi) = 0$ car g 2π périodique
$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$

Donc : $\boxed{\forall g \in C^0_{2\pi} \ , \ \int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt}$

Q5) • Soit $(p,q) \in T_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$\Delta(p+\alpha q)(x)$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} (p+\alpha q)(x-t)g(t)dt$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} (p(x-t)+\alpha q(x-t))g(t)dt$ linéarité de l'intégrale

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t)dt + \alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} q(x-t))g(t)dt$

$= \Delta(p)(x) + \alpha\Delta(q)(x)$

On a donc $\Delta(p+\alpha q) = \Delta(p) + \alpha\Delta(q)$ et on a donc la linéarité de Δ.

• Soit $p \in T_n$, on écrit p sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

Alors : $\Delta(p)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(x-t)} g(t)dt = \sum\limits_{k=-n}^{n} [\int\limits_{-\pi}^{\pi} c_k e^{-ikt} g(t)dt] e^{ikx}$

Avec cette dernière écriture on voit que $\Delta(p) \in T_n$

• Finalement on a Δ linéaire de T_n dans T_n et donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } T_n}$

Q6) Soit t un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$. Alors :

$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikt} = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum\limits_{k=0}^{n} (e^{it})^k$

Vu la condition sur t : $e^{it} \neq 1$ et on peut utiliser la somme des termes d'une suite géométrique pour avoir : $\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{\frac{-nit}{2}} - e^{\frac{(n+2)it}{2}}}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})} = \frac{e^{\frac{-(n+1)it}{2}} - e^{\frac{(n+1)it}{2}}}{e^{-it/2}-e^{it/2}} = \frac{-2isin((n+1)\frac{t}{2})}{-2isin(\frac{t}{2})} = \frac{sin((n+1)\frac{t}{2})}{sin(\frac{t}{2})}$

Pour l'expression de f_n il suffit d'élever à la puissance 4.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } t \text{ un réel n'appartenant pas à } 2\pi\mathbb{Z} \text{ alors : } \varphi_n(t) = \frac{sin((n+1)\frac{t}{2})}{sin(\frac{t}{2})} \text{ et } f_n(t) = \left(\frac{sin((n+1)\frac{t}{2})}{sin(\frac{t}{2})}\right)^4}$

Q7) On peut écrire que : $e^{ni\frac{t}{2}}\varphi_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikt}$

Donc, en élevant au carré : $e^{int}(\varphi_n(t))^2 = \big(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikt}\big)^2$

On peut donc trouver $(a_0, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tel que : $e^{int}(\varphi_n(t))^2 = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k e^{ikt}$

Et donc $(\varphi_n(t))^2 = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k e^{i(k-n)t}$

qui peut se ré-indexer posant $\ell = k-n$ en : $(\varphi_n(t))^2 = \sum\limits_{\ell=-n}^{\ell} a_{\ell+n} e^{i\ell t}$

On en déduit $\varphi_n^2 \in T_n$ On démontre de même que : $\varphi_n^4 \in T_{2n}$

Bilan : $\boxed{\varphi_n^2 \in T_n \text{ et } f_n \in T_{2n}}$

Q8) Avec les expressions initiales de φ_n et de f_n on voit clairement que ces deux fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc que l'intégrale $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n(t)dt$ est bien définie.

Comme f_n est clairement réelle, non nulle et positive (avec l'expression de Q6) on en déduit que : $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n(t)dt \neq 0$

Si on pose $c_= \frac{1}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n(t)dt}$ on a alors : $\boxed{\int\limits_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t)dt = 1}$

Q9) f_n est paire d'après l'expression de Q6), donc J_n est aussi paire.
On a aussi : $t \mapsto |t|\, J_n(t)$ paire et donc :

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|\, J_n(t)dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} tJ_n(t)dt = 2c_n \int\limits_{0}^{\pi} tf_n(t)dt$$

Mais on a aussi par parité : $c_n = \frac{1}{2\int\limits_{0}^{\pi} f_n(t)dt}$ donc $2c_n = \frac{1}{\int\limits_{0}^{\pi} f_n(t)dt}$

et finalement $\boxed{\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|\, J_n(t)dt = \frac{\int\limits_{0}^{\pi} tf_n(t)dt}{\int\limits_{0}^{\pi} f_n(t)dt}}$

Q10) $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $sin''(t) = -cos(t) \leq 0$ donc sin est concave.
Donc la représentation graphique de $sin|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ est au dessous de sa tangente en $(0,0)$ (la droite $y = t$), et au dessus de ses cordes, en particulier le segment $y = \frac{2}{\pi}t$ qui passe par $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$

On en déduit : $\boxed{\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ , } \frac{2}{\pi}t \leq sin(t) \leq t}$

Remarque : on peut bien sûr étudier des fonctions ...

Q11) Pour $t \in [0, \pi]$ on a $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\frac{2}{\pi}\frac{t}{2} \leq sin(\frac{t}{2}) \Rightarrow \frac{1}{sin(t/2)} \leq \frac{\pi}{t}$
Donc, comme $sin((n+1)\frac{t}{2}) \geq 0$: $\frac{sin((n+1)\frac{t}{2})}{sin(t/2)} \leq \pi\frac{sin((n+1)\frac{t}{2})}{t}$
En élevant à la puissance 4 : $f_n(t) \leq \pi^4\frac{sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^4}$ donc $tf_n(t) \leq \pi^4\frac{sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^3}$
En intégrant sur $[0, \pi]$: $\int\limits_{0}^{\pi} tf_n(t)dt \leq \pi^4 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^3}dt$

Dans l'intégrale, on fait le changement de variable $u = (n+1)\frac{t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2u}{n+1}$ donc $dt = \frac{2}{n+1}du$ et on a :

$$\int\limits_{0}^{\pi} tf_n(t)dt \leq \pi^4 \int\limits_{0}^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4(u)}{\frac{2^3}{(n+1)^3}u^3}\frac{2}{n+1}du$$

Et donc : $\boxed{\int\limits_{0}^{\pi} tf_n(t)dt \leq \pi^4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int\limits_{0}^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4(u)}{u^3}du}$

Q12) Pour $t \in [0,\pi]$ on a $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $sin(\frac{t}{2}) \leq \frac{t}{2}$ avec Q10)

Alors $\frac{2}{t} \leq \frac{1}{sin(t/2)}$ donc $\frac{2sin((n+1)\frac{t}{2})}{t} \leq \frac{sin((n+1)\frac{t}{2})}{sin(t/2)}$ et en élevant à la puissance 4 : $\frac{2^4 sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^4} \leq f_n(t)$

En intégrant sur $[0,\pi]$: $\int\limits_0^\pi \frac{2^4 sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^4} dt \leq \int\limits_0^\pi f_n(t)dt$

Dans l'intégrale on fait le changement de variable $u = (n+1)\frac{t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2u}{n+1}$ donc $dt = \frac{2}{n+1}du$ et on a :

$\int\limits_0^\pi \frac{2^4 sin^4(u)}{\frac{2^4}{(n+1)^4}u^4}\frac{2}{n+1}du \leq \int\limits_0^\pi f_n(t)dt$

Et donc : $\boxed{2(n+1)^3 \int\limits_0^\pi \frac{sin^4(u)}{u^3}du \leq \int\limits_0^\pi f_n(t)dt}$

Q13) La question Q12) donne : $\frac{1}{\int\limits_0^\pi f_n(t)dt} \leq \frac{1}{(2n+1)^3}\frac{1}{\int\limits_0^\pi \frac{sin^4(u)}{u^3}du}$

Avec l'inégalité de Q11) : $\int\limits_0^\pi t f_n(t)dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int\limits_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4(u)}{u^3}du$

En multipliant ces 2 inégalités (termes positifs) :

$\frac{\int\limits_0^\pi t f_n(t)dt}{\int\limits_0^\pi f_n(t)dt} \leq \frac{1}{(2n+1)^3}\pi^4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{4}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^4}{4}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^3\frac{1}{n+1}$

On a $n+1 \leq 2n+1$ donc $\frac{\int\limits_0^\pi t f_n(t)dt}{\int\limits_0^\pi f_n(t)dt} \leq \frac{\pi^4}{4}\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)^3\frac{1}{n+1} = \frac{\pi^4}{4}\frac{1}{n+1}$

Donc en posant : $a = \frac{\pi^4}{4}$ et en utilisant Q9) on a : $\boxed{\int\limits_{-\pi}^\pi |t|\, J_n(t)dt \leq \frac{a}{n+1}}$

Q14) • On effectue dans $T_n(g)(x)$ le changement de variable $u = x - t$ et on obtient :

$T_n(g)(x) = \int\limits_{\pi+x}^{-\pi+x} J_n(u)g(x-u)(-du) = \int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} J_n(u)g(x-u)du$

En reposant $t = u$ et en utilisant la question Q4) on obtient :

$\boxed{T_n(g)(x) = \int\limits_{-\pi}^\pi J_n(t)g(x-t)dt}$

• Comme $\int\limits_{-\pi}^\pi J_n(t)dt = 1$ en multipliant par $g(x)$ qui ne dépend pas de t on obtient : $\boxed{\int\limits_{-\pi}^\pi J_n(t)g(x)dt = g(x)}$

• Avec les deux expressions précédentes :

$T_n(g)(x) - g(x) = \int\limits_{-\pi}^\pi J_n(t)g(x-t)dt - \int\limits_{-\pi}^\pi J_n(t)g(x)dt = \int\limits_{-\pi}^\pi J_n(t)\big(g(x-t) - g(x)\big)dt$

Comme $J_n(t) \geq 0$ on a, par l'inégalité de la moyenne :

$\boxed{|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int\limits_{-\pi}^\pi J_n(t)\, |g(x-t) - g(x)|\, dt}$

Q15) a) Comme g est 2π périodique alors g' est 2π périodique.
De plus g est C^1 donc g' est continue et 2π périodique et on peut définir $||g'||_\infty$

Comme g est C^1 on peut appliquer le théorème des accroissements finis pour avoir : $\exists \theta \in \mathbb{R}$,
$g(x-t) - g(x) = g'(\theta)((x-t)-x) = g'(\theta)(-t)$, donc en prenant la valeur absolue :
$|g(x-t) - g(x)| \leq |g'(\theta)|\,|t| \leq ||g'_\infty||\,|t|$

On utilise cette inégalité avec Q14) et on a : $|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,|t|\,||g'||_\infty\,dt = ||g'||_\infty \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,|t|\,dt$

Avec Q13) on a alors : $|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \frac{a||g'||_\infty}{n+1}$ et en passant au sup sur $x \in \mathbb{R}$:

$\boxed{||T_n(g) - g||_\infty \leq \frac{a||g'||_\infty}{n+1}}$

Q15) b) En passant à la limite au a), on a par encadrements : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||T_n(g) - g||_\infty = 0$ et donc $\boxed{(T_n(g)) \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } \mathbb{R}}$

Q16) a) $|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|)$ puisque $|(x-t)-x| = |t| \leq |t|$
En écrivant $\omega_g(|t|) = \omega(n\frac{|t|}{n})$ et en utilisant Q3) avec $\lambda = n\,|t|$ et $h = \frac{1}{n}$ on obtient :
$\omega_g(|t|) \leq (1 + n\,|t|)\omega_g(\frac{1}{n})$

$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|)$ donne alors : $\boxed{|g(x-t) - g(x)| \leq (1 + n\,|t|)\omega_g(\frac{1}{n})}$

Q16) b) D'après Q14) : $|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,|g(x-t) - g(x)|\,dt$

Avec le a) : $|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\big(1 + n\,|t|\,\big)\omega_g(\frac{1}{n})dt \leq \Bigg(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)1dt}_{=1} + n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,|t|\,dt}_{\leq \frac{a}{n+1} \leq 1 \text{ par Q13)}}\Bigg)\omega_g(\frac{1}{n})$

On a donc : $|T_n(g)(x) - g(x)| \leq (1+a)\omega_g(\frac{1}{n})$

En posant $b = 1 + a$ on a : $\boxed{\text{On a donc : } |T_n(g)(x) - g(x)| \leq b\omega_g(\frac{1}{n})}$

Q16) c) En passant au sup sur $x \in \mathbb{R}$ au b) on obtient : $||T_n(g) - g||_\infty \leq b\omega_g(\frac{1}{n})$

Comme il est admit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_g(\frac{1}{n}) = 0$, alors, par encadrements : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||T_n(g) - g||_\infty = 0$ et donc $\boxed{(T_n(g)) \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } \mathbb{R}}$

Q17) T est de degré n, donc dans $\mathbb{C}$, si on ne tiens pas compte de l'ordre de multiplicité, T admet n racines.
Il reste alors a montrer que T n'admet pas de racine double.
Le résultat est évident pour $n=1$ car $1+X^1=1+X$!!!
Raisonnons par l'absurde pour $n\geq 2$: Si X est une racine de T d'ordre au moins 2 :
alors $\begin{cases} T(X)=0 \\ T'(X)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+X^n=0 \\ nX^{n-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0 \\ X=0 \end{cases} \quad (n\geq 2 \text{ donc } n-1\geq 1)$
Comme $1\neq 0$ alors on a une absurdité.

Dans tout les cas T n'admet pas de racine au moins double, donc $\boxed{T \text{ admet } n \text{ racines simples dans } \mathbb{C}}$

Q18) Comme T est unitaire on déduit de Q17) et des notations introduites par l'énoncé que : $T = \prod_{j=1}^{n}(X-z_j)$
Si on dérive : $T' = \sum_{p=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{n}(X-z_j)$
En évaluant en z_k : $T'(z_k) = \sum_{p=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{n}(z_k-z_j)$
Le seul terme de la somme pour lequel il n'y pas de j tel que $z_k-z_j=0$ est celui pour $p=k$ donc :

$$\boxed{\forall k\in [\![1,n]\!]\ ,\ T'(z_k) = \prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(z_k-z_j)}$$

Q19) • Commençons par étudier E.
D'après l'égalité donnée : $E(X) = \underbrace{\dfrac{X^\ell}{1+X^n}}_{\deg=\ell-n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{X-z_k}$

Cas 1 : $\ell\in[\![0,n-1]\!]$
On fait alors tendre X vers $+\infty$ ci-dessus et on obtient : $\lim\limits_{X\to+\infty} E(X)=0$ puisque $\ell-n<0$
Comme E est un polynôme on en déduit que c'est le polynôme nulle (il est borné, donc constant, et comme sa limite est nulle ...).

Cas 2 : $\ell=n$
De même, on fait alors tendre X vers $+\infty$ ci-dessus et on obtient : $\lim\limits_{X\to+\infty} E(X)=1$
Pour les mêmes raison E est le polynôme constant égale à 1.

• En multipliant $F=\frac{X^\ell}{1+X^n}=\frac{X^\ell}{T}=\sum_{K=1}^{n}\frac{\mu_K}{X-z_K}+E$ par $T=\prod_{j=1}^{n}(X-z_j)$ on obtient :
$X^\ell = \sum_{K=1}^{n}\mu_K\prod_{\substack{j=1\\j\neq K}}^{n}(X-z_j)+E\times T(X)$

En évaluant en $X=z_k$: $z_k^\ell = \sum_{K=1}^{n}\mu_K\prod_{\substack{j=1\\j\neq K}}^{n}(z_k-z_j)+E\underbrace{T(z_k)}_{=0}$

Donc $z_k^\ell = \mu_k\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(z_k-z_j)$

Avec Q18) : $z_k^\ell = \mu_k T'(z_k) = \mu_k n z_k^{n-1}$
On multiplie par z_k et on a : $z_k^{\ell+1} = \mu_k T'(z_k) = \mu_k n z_k^n$
Mais $T(z_k) = 0 \Rightarrow 1 + z_k^n = 0 \Rightarrow z_k^n = -1$ donc $z_k^{\ell+1} = -\mu_k n$

On en déduit donc : $\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!]\ ,\ \mu_k = \frac{-z_k^{\ell+1}}{n}}$

Q20) • Comme E est un polynôme constant, on a par dérivation : $F' = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-\mu_k}{(X-z_k)^2}$

On a donc $F'(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-\mu_k}{(1-z_k)^2}$

Avec le résultat de Q19) : $F'(1) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{zk^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}$

• D'autre part : $F'(X) = \frac{\ell X^{\ell-1}(1+X^n) - nX^{n-1}X^\ell}{(1+X^n)^2}$ et donc en $X = 1$: $F'(1) = \frac{2\ell-n}{4}$

• Ave les deux expressions de $F'(1)$ on a :

$\frac{2\ell-n}{4} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{zk^{\ell+1}}{(z_k-1)^2} \Rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{zk^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}}$

Q21) a) • On remarque que : $\Phi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto XP'(X) - \frac{n}{2}P(X) - \frac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k-1)^2}$
est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$

Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$

$$\Phi(X^\ell) = X\ell X^{\ell-1} - \frac{n}{2}X^\ell - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k z_k^\ell X^\ell}{(z_k-1)^2} = X^\ell \underbrace{\left(\ell - \frac{n}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}\right)}_{=0 \text{ d'après Q20)}} = 0$$

On a donc Φ qui est nul sur une base, donc, par linéarité, Φ est nul. On en déduit alors :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X]\ ,\ XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k-1)^2}}$$

Q21) b) En appliquant la formule du a) avec $P = 1$ on a :
$0 = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2}$ et donc $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{4}}$

Q22) • Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $z \mapsto |P(z)|$ est une application continue.
Comme $\{z \in \mathbb{C}\,|z| = 1\}$ est le cercle unité et est donc fermé borné, alors on a un fonction continue sur un fermée bornée, qui est donc bornée et qui atteint ses bornes.
Donc $||P||$ est bien définie et le sup est même un max.

• Soit $(P, Q, \lambda) \in \mathbb{C}[X]^2 \times \mathbb{C}$

i) $||P|| \geq 0$ de manière évidente.

ii) $||\lambda P|| = \sup\limits_{|z|=1} |\lambda P(z)| = \sup\limits_{|z|=1} |\lambda|\,|P(z)| = |\lambda| \sup\limits_{|z|=1} |P(z)| = |\lambda|\,||P||$

iii) $||P|| = 0 \Rightarrow \sup\limits_{|z|=1} |P(z)| = 0 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = 1 \Rightarrow P(z) = 0$
P est donc nul sur le cercle unité, on a un donc un polynôme qui a une infinité de racine et donc $P = 0$

iv) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$
Alors $|(P+Q)(z)| = |P(z) + Q(z)| \leq |P(z)| + |Q(z)|$ par inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
En utilisant la définition de $||.||$: $|(P+Q)(z)| \leq ||P|| + ||Q||$
On peut alors prendre le sup sur le cercle unité et on a : $||P+Q|| \leq ||P|| + ||Q||$

On a donc : $\forall (P, Q, \lambda) \in \mathbb{C}[X]^2 \times \mathbb{C}$, $\begin{cases} ||P|| \geq 0 \\ ||\lambda P|| = |\lambda| \, ||P|| \\ ||P|| = 0 \Rightarrow P = 0 \\ ||P+Q|| \leq ||P|| + ||Q|| \end{cases}$

On en déduit alors que : $\boxed{||.|| \text{ est une norme sur } \mathbb{C}[X]}$

Q23) Soit z un nombre complexe de module 1 que l'on écrit donc $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$
Alors : $\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-1)^2} = \frac{e^{i\theta}}{\left(e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})\right)^2} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}\left(2isin(\theta/2)\right)^2} = \frac{-1}{4sin^2(\theta/2)} \in \mathbb{R}^-$

Remarque : $sin(\theta/2) \neq 0$ car $z \neq 1$

Bilan : $\boxed{\text{Si } z \text{ est nombre complexe de module 1 différent de 1 alors } \frac{z}{(z-1)^2} \text{ est un réel négatif.}}$

Q24) • Commençons par remarquer que : $z_k^n + 1 = 0 \Rightarrow |z_k^n| = |-1| = 1 \Rightarrow |z_k| = 1$

• Soit z un complexe de module 1 différent de 1.
D'après Q21) : $zP'(z) = \frac{n}{2}P(z) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k z)}{(z_k-1)^2}$
Comme $|z| = 1$ alors $|P'(z)| = |zP'(z)|$ et donc, par inégalité triangulaire :
$|P'(z)| \leq \frac{n}{2}|P(z)| + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k P(z_k z)}{(z_k-1)^2} \right|$

On utilise : $|P(z)| \leq ||P||$ et $|P(z_k z)| \leq ||P||$ puisque $|z| = |z_k z| = 1$ car $|z| = |z_k| = 1$

Alors : $|P'(z)| \leq \frac{n}{2}||P|| + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{(z_k-1)^2} \right| ||P||$

Mais, d'après Q23) $\frac{z_k}{(z_k-1)^2} < 0$ donc : $\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{(z_k-1)^2} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{-z_k}{(z_k-1)^2} = \frac{n^2}{4}$ par Q21) b)

On a alors : $|P'(z)| \leq \frac{n}{2}||P|| + \frac{2}{n}\frac{n^2}{4}||P|| = n\,||P||$

On a donc en passant au sup : $\sup\limits_{\substack{|z|=1 \\ z \neq 1}} ||P'(z)|| \leq n\,||P||$

Mais comme $z \mapsto P'(z)$ est continue on a : $\sup\limits_{|z|=1} ||P'(z)|| \leq n\,||P||$ et donc $\boxed{||P'|| \leq n\,||P||}$

Q25) Soit $Q \in T_n$ que l'on écrit $q(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

Changement d'indice $p = n + k$: $q(x) = \sum_{p=0}^{2n} c_{p-n} e^{i(p-n)x} = e^{-inx} \sum_{p=0}^{2n} c_{p-n} e^{ipx}$

Posons $P = \sum_{p=0}^{2n} c_{p-n} X^p$ alors $q(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$

Comme $|e^{ix}| = 1$ alors $|P'(e^{ix})| \leq ||P'||$ et $|P(e^{ix})| \leq ||P||$

De plus $|q(x)| = |P(e^{ix})|$, donc $||q||_\infty = ||P||$

En dérivant q : $q'(x) = -ine^{-inx}P(e^{ix}) + e^{-i(n-1)x}P'(e^{ix})$ donc par inégalité triangulaire :
$|q'(x)| \leq n\,|P(e^{ix})| + |P'(e^{ix})|$

Avec les résultats ci-dessus : $|q'(x)| \leq n\,||P|| + ||P'||$

Comme $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ alors, d'après Q24) : $||P'|| \leq 2n\,||P||$.

On reporte ci-dessus : $|q'(x)| \leq n\,||P|| + 2n\,||P|| = 3n\,||P||$

Et comme $||P|| = ||q||_\infty$ on a alors : $|q'(x)| \leq 3n\,||q||_\infty$

Et en passant au *sup* sur $\mathbb{R}$: $\boxed{||q'||_\infty \leq 3n\,||q||_\infty}$

Q26) • Si $y = 0$ la relation est évidente. On va la démontrer pour $y > 0$.
• Posons $\forall t > 0$, $\varphi(t) = t^\alpha = exp(\alpha ln(t))$
Alors φ est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall t > 0$, $\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} > 0$ car $\alpha > 0$ et donc φ est croissante.
• Soit $y > 0$ et $x \geq y$
Alors comme φ est croissante et que $y \leq x$ alors $\varphi(y) \leq \varphi(x) \Leftrightarrow y^\alpha \leq x^\alpha \Leftrightarrow 0 \leq x^\alpha - y^\alpha$
• Soit $y > 0$. Posons maintenant : $\forall x \geq y$, $A(x) = (x-y)^\alpha - x^\alpha + y^\alpha$
Alors A est dérivable et $\forall x \geq y$, $A'(x) = \alpha(x-y)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} - 0 = \alpha\Big((x-y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\Big)$
Comme $\alpha - 1 < 0$ alors $u \mapsto u^{\alpha-1}$ est décroissante et donc, comme $x - y \leq x$ on a : $(x-y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} \geq 0$ et donc A est croissante.
Mais $A(y) = 0$, donc $\forall x \in [y, +\infty[$, $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^\alpha - y^\alpha \leq (x-y)^\alpha$

• En regroupant les résultats : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 0 < y \leq x \Rightarrow 0 \leq x^\alpha - y^\alpha \leq (x-y)^\alpha}$

Q27) Si on passe à la valeur absolue en Q26) on a : $|h_\alpha(x) - h_\alpha(y)| \leq |x-y|^\alpha$ et donc $\boxed{h_\alpha \text{ est } \alpha\text{-höldérienne.}}$

Q28) Pour $x > 0$: $\frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x-0|^\beta} = \left|\frac{x^\alpha}{x^\beta}\right| = \left|x^{\alpha-\beta}\right|$

Mais, si $\alpha > \beta$, on a $\alpha - \beta > 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x-0|^\beta} = +\infty$
et, si $\alpha < \beta$, on a $\alpha - \beta < 0$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x-0|^\beta} = +\infty$

Si h_α était β höldérienne, on aurait en prenant $y = 0$: $|h_\alpha(x) - h_\alpha(0)| \leq K\,|x-0|^\beta$ donc
$0 \leq \frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x-0|^\beta} \leq K$ ce qui est impossible vu que l'on a au moins une des deux limites ci-deesus.

On a donc : $\boxed{h_\alpha \text{ n'est pas } \beta \text{ höldérienne.}}$

Q29) On prend $y \in]0, 1[$ et $x \in]0, 1-y]$ pour que tout les termes existent.
Posons alors $B(x) = (x+y)ln(x+y) - xln(x) - (y-1)ln(1-y)$ qui est dérivable sur $]0, 1-y[$ avec $B'(x) = ln(x+y) + \frac{x+y}{x+y} - ln(x) - x\frac{1}{x} - 0 = ln(x+y)$ Comme $x < 1-y$ alors $x + y < 1$ et donc $B'(x) < 0$.
On en déduit B décroissante.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} B(x) = yln(y) - (y-1)ln(1-y) = \underbrace{yln(y)}_{<0} + \underbrace{(1-y)ln(1-y)}_{\leq 0} \leq 0$, alors $\forall x \in]0, 1-y[$, $B(y) \leq 0$

On a donc : $\boxed{\forall y \in]0, 1[\ , \ \forall x \in]0, 1-y] \ , \ (x+y)ln(x+y) - xln(x) \leq (y-1)ln(1-y)}$

Q30) • On peut écrire Q29), sous la forme $\forall y \in]0, 1[$, $\forall x \in]0, 1-y]$, $k(x+y) - k(x) \leq -k(1-y)$

Comme k est continue sur $[0,1]$ (la valeur donnée en 0 permet de prolonger $x \mapsto xln(x)$), alors on peut prolonger cette formule et écrire : $\forall Y \in [0,1]$, $\forall X \in [0, 1-y]$, $k(X+Y) - k(X) \leq -k(1-Y)$

• On fixe $\alpha \in]0,1[$.
Soit $(x,y) \in [0,1]^2$. On suppose de plus que $0 \leq x < y \leq 1$

• On pose $X = x \in [0,1]$ et $Y = y - x \in]0,1[$ pour avoir : $y = X + Y$ et $x = X$ et l'inégalité précédente donne : $k(y) - k(x) \leq -k(1-y+x) = -k(1-u)$ avec $u = y - x$

• Montrons que $k(y-x) \leq k(y) - k(x)$
On pose $D(y) = k(y) - k(x) - k(y-x)$
D est C^1 et $D(y) = k'(y) - k'(y-x) = 1 + ln(y) - (1 + ln(y-x)) = ln(y) - ln(y-x) > 0$ car on prend $y > x$
Donc D est croissante sur $]x,1[$ et $D(x) = k(x) - k(x) - k(0) = 0$ donc $D(y) \geq 0$
et donc $k(y-x) \leq k(y) - k(x)$ ou encore $k(u) \leq k(y) - k(x)$ avec $u = y - x$

• On a alors : la double inégalité : $k(u) \leq k(y) - k(x) \leq -k(1-u)$ avec $u = y - x$
Ce qui donne :
$|k(y) - k(x)| \leq max(|k(u)|\, , |-k(1-u)|) = max(-k(u), -k(1-u)) \leq -k(u) - k(1-u)$

• On utilise ce résultat pour majorer $\frac{|k(x)-k(y)|}{|x-y|^\alpha}$

Alors : $\frac{|k(x)-k(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{-k(1-u)-k(u)}{u^\alpha} = C(u)$ avec $C(u) = \frac{-(1-u)ln(1-u)-uln(u)}{u^\alpha}$

On va étudier C sur $]0,1[$ car $u = y - x \in]0,1[$
C est clairement continue sur $]0,1[$. Voyons si elle est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

En 0 :
$C(u) = \frac{-(1-u)ln(1-u)}{u^\alpha} + \frac{-uln(u)}{u^\alpha} = \frac{-(1-u)(-u+o(u))}{u^\alpha} + \frac{-uln(u)}{u^\alpha} = u^{\alpha-1} + o(u^{\alpha-1}) - u^{1-\alpha}ln(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$ car $1 - \alpha > 0$
Donc C est prolongeable par continuité en 0.

En 1 :
$C(u) = \frac{-(1-u)ln(1-u)-uln(u)}{u^\alpha} \underset{u\to 1}{\longrightarrow} 0$ Donc C est prolongeable par continuité en 1.

C peut donc être prolongée en une fonction continue sur $[0,1]$ et on a alors une fonction continue sur un segment. On en déduit que C est bornée, donc $\exists M > 0$, $\forall u \in]0,1[$, $C(u) \leq M$

Donc si $0 \leq x < y \leq 1$ on a : $\frac{|k(x)-k(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M$ qui sécrit : $|k(x) - k(y)| \leq M\,|x-y|^\alpha$
Le résultat est évident pour $x = y$ et est aussi vrai, par symétrie pour $x > y$.
On a donc $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|k(x) - k(y)| \leq M\,|x-y|^\alpha$ et donc $\boxed{\forall \alpha \in]0,1[\text{ , } k \text{ est } \alpha\text{-höldérienne.}}$

Q31) • Soit $f \in H_{2\pi}^{\alpha}$
Fixons $x \in \mathbb{R}$.
On sait que : $|f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y|^{\alpha} \underset{x \to y}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha \in]0,1[$
On a donc f continue. Comme on savait déjà que f était 2π périodique alors : $f \in C_{2\pi}^{0}$

On a donc $H_{2\pi}^{\alpha} \subset C_{2\pi}^{0}$

• $H_{2\pi}^{\alpha}$ est clairement non vide, puisque la fonction nulle est dans cette enesemble.

• Soit $(f,g) \in (H_{2\pi}^{\alpha})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors, par inégalité triangulaire :
$$\begin{aligned}|(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(y)| &\leq |f(x)-f(y)| + |\lambda|\,|g(x)-g(y)| \\ &\leq K_f\,|x-y|^{\alpha} + |\lambda|\,K_g\,|x-y|^{\alpha} = (K_f + |\lambda|\,K_g)\,|x-y|^{\alpha}\end{aligned}$$
On en déduit $f+\lambda g$ α-höldérienne donc $f+\lambda g \in H_{2\pi}^{\alpha}$

• On a donc $H_{2\pi}^{\alpha}$ est une partie non vide, stable par combinaison linéaire de $C_{2\pi}^{0}$, donc :

$\boxed{H_{2\pi}^{\alpha} \text{ est un sous-espace vectoriel de } C_{2\pi}^{0}}$

Q32) • On a $g \in C_{2\pi}^{0}$, donc on peut utiliser le 16b) pour trouver $T_n g$ telle que $||T_n g - g||_{\infty} \leq b\omega_g(\frac{1}{n})$
Mais d'après la question Q8) $J_n \in T_{2n}$ et donc $T_n g \in T_{2n}$
On a donc $\delta_{2n}(g) \leq ||g - T_n g||_{\infty} \leq b\omega_g(\frac{1}{n})$

Mais g α-höldérienne donne : $w_g(h) \leq Kh^{\alpha}$ donc : $\delta_{2n}(g) \leq ||g - T_n g||_{\infty} \leq Kb\frac{1}{n^{\alpha}}$

On en déduit donc $\delta_{2n}(g) = O(\frac{1}{n^{\alpha}})$

Puisque $T_{2n} \subset T_{2n+1} \subset T_{2n+2}$ alors : $\delta_{2n+2}(g) \leq \delta_{2n+1}(g) \leq \delta_{2n}(g)$ et donc $\delta_{2n+1}(g) = O(\frac{1}{n^{\alpha}})$

Finalement : $\boxed{\delta_n(g) = O(\frac{1}{n^{\alpha}})}$

Q33) • On a $\delta_n(f) = \inf\limits_{p \in T_n} ||f - p||_{\infty}$
Comme on peut choisir p égale à la fonction nulle qui est bien dans T_n alors : $\delta_n(f) \leq ||f||_{\infty}$

• Posons $\Omega = \{p \in T_n \ , \ ||f-p||_{\infty} \leq ||f||_{\infty}\}$

Alors : # Ω est non vide puisqu'il contient la fonction nulle.

Ω est bornée puisque, par la deuxième inégalité triangulaire et par la définition de Ω :

$||p||_{\infty} - ||f||_{\infty} \leq ||p-f||_{\infty} \leq ||f||_{\infty} \Rightarrow ||p||_{\infty} \leq 2\,||f||_{\infty}$

Ω est fermé car : $\Omega = \rho^{-1}([0, ||f||_{\infty}])$ avec $\rho : p \in T_n \mapsto ||p-f||_{\infty}$ qui est une application continue.

• $p \mapsto ||f-p||_{\infty}$ est donc une application continue qui atteint ses bornes sur Ω puisque Ω est une partie fermée bornée de T_n
Donc $\exists q_n \in T_n \ , \ \forall p \in \Omega \ , \ ||f-p||_{\infty} \geq ||f - q_n|| = \inf\limits_{p \in T_n} ||f-p||_{\infty}$

- Comme pour $p \notin \Omega$ on a : $||p-f|| \geq ||f||_\infty \geq \delta_n(f)$ alors on en déduit : $\delta_n(f) = ||f-q_n||_\infty$

- Conclusion : $\boxed{\exists q_n \in T_n\ ,\ \delta_n(f) = ||f-q_n||_\infty}$

Q34) Posons $q_n = p_{n+1} - p_n$, alors $q_n \in T_{2^{n+1}}$, on peut donc appliquer Q25) et obtenir : $\left|\left|p'_{n+1} - p'_n\right|\right| \leq 3 \times 2^{n+1} \left|\left|p_{n+1} - p_n\right|\right|_\infty$

Mais $||p_{n+1} - p_n||_\infty = ||p_{n+1} - f + f - p_n||_\infty$ et par inégalité triangulaire on a : $||p_{n+1} - p_n||_\infty \leq ||p_{n+1} - f||_\infty + ||f - p_n||_\infty$

On utilise la définition de $\delta_{2^{n+1}}$ pour avoir : $||p_{n+1} - p_n||_\infty \leq 2\delta_{2^{n+1}}(f)$

Mais, par hypothèse : $\delta_{2^{n+1}}(f) = O(\frac{1}{(2^{n+1})^\alpha}) = O(2^{-\alpha(n+1)})$ Donc il existe une constante $M > 0$ telle que : $\delta_{2^{n+1}}(f) \leq M2^{-\alpha(n+1)}$

En reportant ci-dessus : $||p_{n+1} - p_n||_\infty \leq 2M2^{-\alpha(n+1)}$

On reporte encore dans $\left|\left|p'_{n+1} - p'_n\right|\right| \leq 3 \times 2^{n+1} \left|\left|p_{n+1} - p_n\right|\right|_\infty$
et on obtient : $\left|\left|p'_{n+1} - p'_n\right|\right| \leq 6M2^{n+1}2^{-\alpha(n+1)} = \underbrace{6M2^{1-\alpha}}_{C'} 2^{n(1-\alpha)}$

On a donc : $\boxed{\exists C' > 0\ ,\ \left|\left|p'_{n+1} - p'_n\right|\right| \leq C'2^{n(1-\alpha)}}$

Q35) On remarque $p_n = p_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(p_k - p_{k-1})$, donc en dérivant : $p'_n = p'_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(p'_k - p'_{k-1})$
Par inégalité triangulaire : $||p'_n||_\infty \leq ||p'_0||_\infty + \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\left|p'_k - p'_{k-1}\right|\right|_\infty$

On utilise alors Q34) et on a : $||p'_n||_\infty \leq ||p'_0||_\infty + \sum\limits_{k=1}^{n} C'2^{(k-1)(1-\alpha)}$
Somme des termes d'une série géométrique de raison $2^{1-\alpha}$

$||p'_n||_\infty \leq ||p'_0||_\infty + C'\frac{1-2^{n(1-\alpha)}}{1-2^{1-\alpha}} \Rightarrow ||p'_n||_\infty \leq ||p'_0||_\infty + C'\frac{2^{n(1-\alpha)}-1}{2^{1-\alpha}-1} \Rightarrow ||p'_n||_\infty \leq ||p'_0||_\infty + C'\frac{2^{n(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha}-1}$

On a donc : $\boxed{||p'_n||_\infty \leq ||p'_0||_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1}2^{n(1-\alpha)}}$

Q36) On a : $2^{n(1-\alpha)} \geq 1$ puisque $\alpha \in]0,1[$ donc $||p'_0||_\infty \leq 2^{n(1-\alpha)}\,||p'_0||_\infty$

Reporter en Q35) : $||p'_n||_\infty \leq 2^{n(1-\alpha)}\,||p'_0||_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1}2^{n(1-\alpha)} = 2^{n(1-\alpha)}\underbrace{[||p'_0||_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1}]}_{A}2^{n(1-\alpha)}$

Donc : $\boxed{\exists A > 0\ ,\ ||p'_n||_\infty \leq A2^{n(1-\alpha)}}$

Q37) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in N$.
Alors $f(x)-f(y) = f(x)-p_n(x)+p_n(x)-p_n(y)+p_n(y)-f(y)$ donc par inégalité triangulaire :
$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-p_n(x)|+|p_n(x)-p_n(y)|+|p_n(y)-f(y)|$

Par définition de $||f-p_n||_\infty$ on a : $|f(x)-f(y)| \leq 2\,||f-p_n||_\infty + |p_n(x)-p_n(y)|$

Mais $||f-p_n||_\infty \leq 2\delta_{2^n}(f) \leq C\frac{1}{(2^n)^\alpha}$ donc : $|f(x)-f(y)| \leq 2C\frac{1}{(2^n)^\alpha} + |p_n(x)-p_n(y)|$

Mais $|p_n(x)-p_n(y)| \leq w_{p_n}(|x-y|) \leq ||p_n'||_\infty\,|x-y|$ par le théorème des accroissements finis. Donc :
$|f(x)-f(y)| \leq 2C\frac{1}{(2^n)^\alpha} + ||p_n'||_\infty\,|x-y|$

En utilisant Q36), on obtient : $\boxed{|f(x)-f(y)| \leq C2^{1-n\alpha} + A2^{(1-\alpha)n}\,|x-y|}$

Q38) On cherche une constante $K>0$ telle que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y|^\alpha$
Comme suggéré par l'énoncé on a considérer plusiseurs cas.

cas 1 : $x=y$

Alors $|f(x)-f(y)| = 0 \leq K_1\,|x-y|^\alpha$ avec $K_1 = 1$ par exemple.

cas 2 : $|x-y|>1$

Alors $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)|+|f(y)| \leq ||f||_\infty + ||f||_\infty = 2\,||f||_\infty$
Comme $|x-y|>1$ alors $|x-y|^\alpha > 1$ et donc $|f(x)-f(y)| \leq 2\,||f||_\infty\,|x-y|^\alpha$

On a : $|f(x)-f(y)| \leq K_2\,|x-y|^\alpha$ avec $K_2 = 2\,||f||_\infty$

cas 3 : $0<|x-y|\leq 1$

Comme suggéré choisissons $ns \in \mathbb{N}\ ,\ \frac{1}{2^{n+1}} \leq |x-y| \leq \frac{1}{2^n}$
(possible car $(\frac{1}{2^n})$ est décroissante et tend vers 0 en partant de $1 \geq |x-y|$)

Alors, avec Q37) : $|f(x)-f(y)| \leq \frac{2C}{2^{n\alpha}} + \frac{A2^n}{2^{n\alpha}}\,|x-y|$

Mais $2^n\,|x-y| \leq 1$ donc : $|f(x)-f(y)| \leq \frac{2C}{2^{n\alpha}} + \frac{A}{2^{n\alpha}} = \frac{2C+A}{2^{n\alpha}} = \frac{(2C+A)2^\alpha}{2^{(n+1)\alpha}}$
Mais $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x-y|$ donc $\frac{1}{2^{(n+1)\alpha}} \leq |x-y|^\alpha$ donc $|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{(2C+A)2^\alpha}_{K}\,|x-y|^\alpha$

On a donc trouvé $K>0$ telle que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y|^\alpha$

On a donc : $\boxed{f \text{ est } \alpha\text{-höldérienne.}}$