

Feuille d'exercices n°39 : chap. 15

Exercice 335. On se place dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique.

Soit $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Soit f (respectivement g) l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 admettant A (respectivement B) comme matrice relativement à la base canonique.

Reconnaître f et g (donner la nature et les éléments caractéristiques)

Exercice 336. On se place dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique.

Donner les matrices, relativement à la base canonique, de f la rotation d'angle $-\arcsin(\frac{2}{5})$ et de g la réflexion de droite $2x - 3y = 0$

Exercice 337. On se place dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique.

Soit D la droite d'équation cartésienne $2x - y = 0$

Déterminer la matrice relativement à la base canonique de f la réflexion de droite D .

Déterminer la nature de $h = f \circ g$ avec g la réflexion d'axe $x = 0$.

Déterminer la nature de $\hat{h} = g \circ f$.

Exercice 338. Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien $(E, <, >)$.

Montrer que : $\ker(f - Id_E) = (\text{Im}(f - Id_E))^\perp$

Exercice 339. ★

On considère un espace euclidien $(E, <, >)$.

On dit que $f \in L(E)$ est une **similitude vectorielle** s'il existe une isométrie vectorielle u et un scalaire $k > 0$ tel que $f = ku$

1°) Montrer que si f est une similitude vectorielle alors elle conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire que : $\forall (x, y) \in E^2 \quad <x, y> = 0 \Rightarrow <f(x), f(y)> = 0$

2°) Montrer que si a et b sont deux vecteurs unitaires orthogonaux : $<a + b, a - b> = 0$

3°) On suppose que f est un endomorphisme non nul conservant l'orthogonalité.

Montrer que f est une similitude.

Exercice 340. On se place dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ Soit $P = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer la matrice relativement à la base canonique de la réflexion de plan P .

Exercice 341. On se place dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique. On note $B = (i, j, k)$ la

base canonique. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 admettant $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ comme matrice

relativement à la base canonique B .

Montrer que f est une rotation, déterminer un vecteur orientant son axe et déterminer son angle.

Exercice 342. (★)

Dans $M_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont-ils ouverts ? fermés ?