Feuille d'exercices n°41 : chap. 15

Exercice 351. *Diagonaliser* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *dans une base orthonormée.*

Exercice 352. ($\star$)
Soit $(E, <,>)$ *un espace préhilbertien de dimension finie.*
a) Montrer que $\forall u \in L(E)\ , \exists! u^* \in L(E)\ ,\ \forall (x,y) \in E^2\ ,\ < u(x), y >=< x, u^*(y) >$
u^* *est appelé* **adjoint** *de* u.
b) Montrer que $(u^*)^* = u$
c) Si B *est une base orthonormée de* E*, exprimer* $M_B(u^*)$ *en fonction de* $M_B(u)$.
d) Que dire de u^* *si* u *est une isométrie vectorielle ?*
e) Que dire de u^* *si* u *est autoadjoint ?*

Exercice 353. *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien,* a *un vecteur unitaire de* E *et* α *un nombre réel quelconque.*
On pose : $\forall x \in E \quad \varphi(x) = x + \alpha < x, a > a$
a) Déterminer la dimension de $F = \{a\}^\perp$
b) Montrer que φ *est un endomorphisme de* E.
c) Calculer $\varphi(a)$
d) Calculer $\varphi(x)$ *pour* $x \in F$
e) Montrer que φ *est diagonalisable.*
f) Déterminer α *pour que* $\varphi = Id_E$
g) Déterminer α *pour que* φ *soit une symétrie autre que* Id.
Caractériser cette symétrie à l'aide de a
h) Déterminer α *pour que* φ *soit une projection autre que* Id.
Caractériser cette projection à l'aide de a

Exercice 354. ($\star$)
Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $|a_{i,j}| \leq 1$*, que* $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leq n$*, que* $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n$ *et que* $n \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}}$

Exercice 355. *Soit* a *un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique.*
On pose $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad f(x) = a \wedge x + < a, x > a$
a) Montrer que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$
b) Reconnaître f

Exercice 356. *On donne* $a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *et on pose* $A = (a_i a_j) \in M_n(\mathbb{R})$.
Étudier la diagonalisabilité de A*, préciser ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.*

Exercice 357. ($\star$)
Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. *a) Montrer que* $S = AA^T$ *est une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres ,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n$ *sont positives.*
b) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{i,j})^2$
c) Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives.*
Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $S = AA^T$.