

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°7

EXERCICE 1

a) • On pose :
$$\begin{array}{ccc} f & : &]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x \ln(x)}{1+x^3} \end{array}$$

Alors f est continue sur $]0, +\infty[$ et donc A pose problème en 0 et en $+\infty$.

• En 0

Par limite du cours on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 et donc $\int_0^1 f(x) dx$ est convergente.

• En $+\infty$

$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} \sim \frac{x \ln(x)}{x^3} x^{3/2} = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit donc $f(x) = o(\frac{1}{x^{3/2}})$

Comme $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (par Riemann), on a, par négligeabilité, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

• $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_0^1 f(x) dx$ sont convergentes donc A est convergente.

b) Pour $n > 1$ on a : $\frac{\frac{(\ln(n))^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit donc $\frac{(\ln(n))^2}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$

Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann absolument convergente, alors, par négligeabilité, $\sum \frac{(\ln(n))^2}{n^2}$ convergente.

c) On pose $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(z) = (-1)^n \frac{\sin(n) + 2^n}{8^n} z^{2n+1}$

On a, pour $z \neq 0$: $|a_n(z)| \sim \frac{2^n}{8^n} |z|^{2n+1} \sim |z| \left(\frac{|z|^2}{4}\right)^n$

$\sum \left(\frac{|z|^2}{4}\right)^n$ est alors une série géométrique de raison $\frac{|z|^2}{4}$ convergente si et seulement si $\frac{|z|^2}{4} < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$

Par la règle de l'équivalent : $\sum a_n(z)$ convergente $\Leftrightarrow |z| < 2$

On en déduit que le rayon de convergence de $\sum (-1)^n \frac{\sin(n) + 2^n}{8^n} z^{2n+1}$ vaut $R = 2$

d) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ on pose $u_n(z) = \frac{n!}{(2n)!} z^n$. Alors $u_n(z) \neq 0$ et

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n! z^n} \right| = \left| \frac{(n+1)z}{(2n+2)(2n+1)} \right| \sim \left| \frac{z}{4n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par la règle de D'Alembert, comme $0 < 1$, alors $\sum u_n(z)$ est toujours convergente et donc

le rayon de convergence de $\sum \frac{n!}{(2n)!} z^n$ vaut $R = +\infty$

e) On distingue deux cas.

CAS 1 : $|a| \leq 1$

Alors $\frac{a^{n+n}}{n+1} \sim 1$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries entières : $\sum \frac{a^{n+n}}{n+1} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum 1z^n$ qui est une série entière du cours de rayon de convergence 1.

CAS 2 : $|a| > 1$

Alors $\frac{a^n}{n} \sim 1$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries entières : $\sum \frac{a^{n+n}}{n+1} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum \frac{a^n}{n} z^n$.

Par dérivation, cette série entière a même rayon de convergence que : $\sum a^n z^n = \sum (az)^n$

On reconnaît une série géométrique de raison az , convergente si et seulement si $|az| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{|a|}$

Le rayon de convergence de $\sum \frac{a^{n+n}}{n+1} z^n$ vaut alors $R = \frac{1}{|a|}$

($a \neq 0$)

Bilan : Le rayon de convergence de $\sum \frac{a^{n+n}}{n+1} z^n$ vaut : $R = \begin{cases} \frac{1}{|a|} & \text{si } |a| > 1 \\ 1 & \text{si } |a| \leq 1 \end{cases}$

On peut résumer ceci en $R = \min(1, \frac{1}{|a|})$

EXERCICE 2

On pose :
$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On sait d'après le cours que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

On remarque que cette dernière formule est encore valable en 0, puisque l'on a posé $g(0) = 0$

On a donc g qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a posé g de telle sorte que : $f = g^2$ et donc $\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme produit de fonctions C^∞ .

EXERCICE 3

a) • $S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

$\left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \right| \sim \frac{1}{n^2} > 0$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \right|$ est convergente par la règle de l'équivalent.

On a donc $S(1)$ absolument convergente et donc convergente et donc,

comme $R = \sup(\{x \geq 0, S(x) \text{ convergente}\})$ on a que $R \geq 1$

• Par comparaison puissance-exponentielle $|x| > 1 \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Comme $R = \sup(\{x \geq 0, (\frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\})$ alors : $R \leq 1$

On a $R \geq 1$ et $R \leq 1$ donc $\boxed{R = 1}$

b) Par définition du rayon de convergence on sait déjà que S est définie sur $] -R, R[$ et que $D \subset [-R, R]$. Il reste à voir ce qui se passe en R et $-R$. On a vu au a) que $S(1)$ était convergente donc $1 \in D$. De même $-1 \in D$.

Bilan : $\boxed{D = [-1, 1]}$

c) S est C^∞ sur $] - R; R[$ comme série entière.

On peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. On a alors

$$\forall x \in] - R; R[, S'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1} = - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} x^p$$

On reconnaît une série entière du cours et on a alors : $\forall x \in] - 1; 1[S'(x) = \ln(1+x)$

En intégrant par parties, avec des fonctions dérivables, l'expression trouvée on obtient sur $] - 1; 1[$:

$$S(x) = [(x+1)\ln(1+x)] - \int (x+1) \frac{1}{x+1} dx = (x+1)\ln(x+1) - x + \mu \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}$$

Avec l'expression ci-dessus on obtient en $x = 0$: $S(0) = \mu$

Avec l'expression sous forme de série entière on obtient : $S(0) = 0$ et on a donc $\mu = 0$

On a finalement : $\boxed{\forall x \in] - 1; 1[, S(x) = (x+1)\ln(1+x) - x}$

d) Si on pose : $\forall n \geq 2$ et $\forall x \in [-1, 1]$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

$$\text{Alors } \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, alors, par équivalence $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente, et donc $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1, 1]$

Comme la convergence uniforme conserve la continuité et que les f_n sont continues, on a que :

$\boxed{S \text{ est continue sur } D = [-1, 1]}$

e) • Comme S est continue en 1, alors :

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((x+1)\ln(1+x) - x) = 2\ln(2) - 1 = \ln(4) - 1$$

On en déduit $S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \ln(4) - 1$ et on remarque que l'expression du c) est valable en $x = 1$

• De même, S est continue en -1 et donc :

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} ((x+1)\ln(1+x) - x) = 0 - (-1) = 1$$

On a donc : $\boxed{S(x) = \begin{cases} (x+1)\ln(1+x) - x & \text{si } x \in] - 1, 1] \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}}$

EXERCICE 4 : exercice de e3A PC 2025

1) Si y est une solution de (E) alors on peut évaluer (E) en $x = 0$, et on a :

$$0y''(0) + xy'(0) - 1y(0) = 0 \text{ donc } \boxed{y(0) = 0}$$

2.1) • On a déjà : $a_0 = f(0) = 0$ par la question 1).

Comme on suppose que $f'(0) = 1$ alors $a_1 = 1$

• Reste à montrer la formule de récurrence.

Une série entière est C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et on peut la dériver terme, alors :

$$\forall x \in] - R; R[, \begin{cases} f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
& f \text{ solution de } E \text{ sur }]-R, R[\\
\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad x^2 f''(x) + x f'(x) - (x^2 + x + 1)f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (x^2 + x + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0
\end{aligned}$$

Changement d'indice $p = n + 1$ dans l'avant dernière somme, $p = n + 2$ dans la dernière et $p = n$ dans les autres.

f solution de E sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} p(p-1)a_p x^p + \sum_{p=0}^{+\infty} p a_p x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p - \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p-1} x^p - \sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^p = 0$$

On fait attention aux premiers termes, on tient compte de $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on regroupe les termes pour $p \geq 2$

f solution de E sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad 0 + 0 + 0 + a_1 x - a_0 - a_1 x - a_0 x + \sum_{p=2}^{+\infty} [p(p-1)a_p x^p + p a_p - a_p - a_{p-1} x^p - a_{p-2}] x^p = 0 \\
\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{p=2}^{+\infty} [(p(p-1) + p - 1)a_p - a_{p-1} - a_{p-2}] x^p = 0 \\
\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{p=2}^{+\infty} [(p^2 - 1)a_p - a_{p-1} - a_{p-2}] x^p = 0
\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'unicité du DSE_0 avec $R > 0$ pour obtenir :

$$\forall p \geq 2 , \quad (p^2 - 1)a_p - a_{p-1} - a_{p-2} = 0$$

En posant $n = p$ et en reprenant les résultats du début de questions :

$$\boxed{
\begin{cases}
\forall n \geq 2 , \quad (n^2 - 1)a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\
a_0 = 0 \\
a_1 = 1
\end{cases}
}$$

2.2) Montrons par une récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \geq 1 , \quad |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}$

Initialisation : $a_1 = 1$ et $\frac{1}{(1-1)!} = 1$ donc $|a_1| \leq \frac{1}{(1-1)!}$ vraie.

$$(4 - 1)a_2 - a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow 3a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{(2-1)!} = \frac{1}{2} \text{ donc } |a_2| \leq \frac{1}{(2-1)!} \text{ vraie.}$$

Hérédité : On suppose $|a_{n-1}| \leq \frac{1}{(n-2)!}$ et $|a_{n-2}| \leq \frac{1}{(n-3)!}$

Alors $(n^2 - 1)a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ implique, par l'inégalité triangulaire : $(n^2 - 1)|a_n| \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}|$

Et, avec les hypothèses de récurrences : $(n^2 - 1)|a_n| \leq \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} = \frac{1}{(n-3)!} \left(\frac{1}{n-2} + 1 \right) = \frac{1}{(n-3)!} \frac{n-1}{n-2}$

$$\Rightarrow (n-1)(n+1)|a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!} \frac{n-1}{n-2}$$

$$\Rightarrow (n+1)|a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!} \frac{1}{n-2}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!} \frac{1}{(n-2)(n+1)}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{(n-3)!} \frac{1}{(n-2)(n-1)} \text{ car } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1 , \quad |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}}$

2.3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = x \exp(x)$ et on sait que ça converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après le cours.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et, par comparaison avec l'inégalité du 2.2) : $R = +\infty$

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

$$3.1) z(0) = 0y(0)e^0 = 0$$

Comme y est C^2 alors z est C^2

Pour $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = y(x)e^x + xy'(x)e^x + xy(x)e^x = (1+x)y(x)e^x + xy'(x)e^x$ donc $z'(0) = y(0) = 0$ d'après 1.)

On a donc : $z(0) = z'(0) = 0$

$$3.2) z \text{ est } C^2 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$z''(x)$$

$$= y(x)e^x + (1+x)y'(x)e^x + (1+x)y(x)e^x + [y'(x)e^x + xy''(x)e^x + xy'(x)e^x]$$

$$= [xy''(x) + (2+2x)y'(x) + (2+x)y(x)]e^x$$

$$\text{Alors : } xz''(x) - (2x+1)z'(x)$$

$$= x[xy''(x) + (2+2x)y'(x) + (2+x)y(x)]e^x - (2x+1)[(1+x)y(x)e^x + xy'(x)e^x]$$

$$= e^x \left(x^2y''(x) + (2x+2x^2-2x^2-x)y'(x) + (2x+x^2-(2x+1)(1+x))y(x) \right)$$

$$= e^x \left(x^2y''(x) + xy'(x) + (2x+x^2-2x^2-3x-1)y(x) \right)$$

$$= e^x \left(x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2+x+1)y(x) \right)$$

$$= 0 \text{ car } y \text{ est solution de } (E)$$

On a donc : z' est solution de (F)

$$3.3.1) \text{ Soit } I = \mathbb{R}_+^*. \text{ Alors :}$$

$$\int (2 + \frac{1}{x}) dx = 2x + \ln(|x|) = 2x + \ln(x) \text{ car } x > 0$$

(F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène, à coefficient continue (coefficient en u' non nul), donc, d'après le cours, les solutions de (F) sur I s'écrivent : $u(x) = a \exp(2x + \ln(x)) = axe^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrivent : $u(x) = axe^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$

3.3.2) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} axe^{2x} = 0$ donc les fonctions sont prolongeables par continuité en 0, en posant $u(0) = 0$

$$3.4) \text{ Posons } \forall x \in \mathbb{R}, U(x) = cxe^{2x}$$

Alors U est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $U'(x) = c(1+2x)e^{2x}$.

$$\text{Alors : } U'(x) - (2 + \frac{1}{x})U(x) = c(1+2x)e^{2x} - (2 + \frac{1}{x})cxe^{2x} = ce^{2x} \left(1 + 2x - 2x - 1 \right) = 0$$

Donc : $x \mapsto cxe^{2x}$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}^*$

3.5) Comme z' est solution de (F) sur $\mathbb{R}$, alors, en admettant le résultat de l'énoncé (que l'on sait capable, en PSI, de démontrer) : $\exists a \in \mathbb{R}$, $z'(x) = 4axe^{2x}$

Par intégration par parties :

$$z(x) = \left[4ax \frac{e^{2x}}{2} \right] - \int 4a \frac{e^{2x}}{2} dx = 2axe^{2x} - ae^{2x} + \theta = a(2x - 1)e^{2x} + \theta \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Mais $z(0) = 0$ donc $\theta = a$

$$\text{Finalement : } \boxed{\exists a \in \mathbb{R}, z(x) = a(2x - 1)e^{2x} + a}$$

3.6) f est une solution C^2 de (E) sur $\mathbb{R}$, donc d'après ce qui précède :

$$\exists a \in \mathbb{R}, a(2x - 1)e^{2x} + a = xf(x)e^x$$

$$\text{Donc, pour } x \neq 0, f(x) = a \left((2 - \frac{1}{x})e^x + \frac{1}{xe^x} \right) = a \left(2e^x - 2\frac{1}{x} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = 2a \left(e^x - \frac{sh(x)}{x} \right)$$

$$\text{Au voisinage de } 0 : f(x) = 2a \left(1 + x + o(x) - \frac{x + o(x^2)}{x} \right) = 2a(1 + x - 1 + o(x)) = 2ax + o(x)$$

Comme f est C^∞ on a aussi : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$, donc, par unicité du DL : $2a = f'(0) = 1$ par la question 2.)

Il reste $f(x) = e^x - \frac{sh(x)}{x}$ pour $x \neq 0$

$$\text{On a alors : } \boxed{f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{sh(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

EXERCICE 5 : exercice de e3A MP 2025

$$1.) \text{ On sait d'après le cours que : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$$2.) \text{ Comme } n! \geq 1 \text{ alors : } 0 \leq \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n!}$$

On sait (d'après 1.) que $\sum \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$

Donc, par comparaison : $\sum \frac{x^n}{(n!)^2}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

$$3.) f \text{ est une série entière de rayon de convergence } +\infty, \text{ donc } \boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4.) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Comme f est C^∞ sur $[a, b]$ on peut appliquer le théorème des accroissements finis et obtenir :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \exists c \in]a, b[, f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

Mais f' est continue sur $[a, b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes $\exists M > 0, \forall c \in [a, b], |f'(c)| \leq M$

$$\text{Appliquer à l'inégalité ci-dessus : } |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

On a donc f M lipschitzienne sur $[a, b]$.

$$\text{On a donc } \boxed{f \text{ lipschitzienne sur tout segment de } \mathbb{R}}$$

$$5.) \text{ On peut dériver une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. Ici, on peut donc dériver } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$\text{Mais, puisque } x \geq 0 \text{ et } \frac{1}{(n-1)!} \leq 1, \text{ on a : } f'(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$$

$$\text{Bilan : } \boxed{\forall x \geq 0, f'(x) \leq e^x}$$

6.) Soit x et y deux réels positifs.

Toujours avec le théorème des accroissements finis $\exists c \in [x, y]$, $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$

En prenant la valeur absolue : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y|$

Comme $f'(c) \geq 0$ (somme de termes positifs) et que $f'(c) \leq e^c$ alors : $|f(x) - f(y)| \leq e^c |x - y|$

Comme $c \in [x, y]$ alors $e^c \leq e^z$ et on a bien : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, |f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$

7.) f est C^∞ donc par la formule de Taylor-Young, pour x au voisinage de 0 : $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$
Mais $f(0) = \frac{1}{0!^2} = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{1!^2} = 1$ donc $f(x) = 1 + x + o(x) \Rightarrow f(x) - 1 = x + o(x) \sim x$

Donc, au voisinage de 0 : $f(x) - 1 \underset{x=0}{\sim} x$

8.) On a $\forall t > 0$, $f(t) \geq 1$ (1 est le premier terme de la somme et les autres sont positifs)
Donc $t \mapsto \frac{1}{t(f(t))^2}$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et même de classe C^∞

g est donc une primitive d'une fonction C^∞ , donc : g est C^∞ sur $]0, +\infty[$

9.) $\frac{1}{t(f(t))^2} \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, donc le signe de g dépend de la position de x par rapport à 1.

On a :
$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si } x > 1 \\ g(x) < 0 & \text{si } x < 1 \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

10.) On remarque que : $\forall x > 0$, $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x)$

Donc $g(x) - \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t(f(t))^2} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x [\frac{1}{t(f(t))^2} - \frac{1}{t}] dt = \int_1^x \frac{1 - (f(t))^2}{t(f(t))^2} dt$

On pose $\forall t > 0$, $g(t) = \frac{1 - (f(t))^2}{t(f(t))^2}$

par la question 7.), au voisinage de 0 :

$g(t) = \frac{1 - (1 + t + o(t))^2}{t(f(t))^2} = \frac{1 - 1 - 2t + o(t)}{t(f(t))^2} = \frac{-2t + o(t)}{t(f(t))^2} = \frac{-2 + o(1)}{(f(t))^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -2$ (puisque f continue en 0 et $f(0) = 1$)

g est donc prolongeable par continuité en 0 et donc $\int_0^1 g(t) dt$ est convergente.

On a donc $g(x) - \ln(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \int_0^1 g(t) dt$

Donc $g(x) - \ln(x) = O(1)$ et donc : $g(x) \underset{x=0}{\sim} \ln(x)$

11.) Pour $t > 0$: $f(t) = 1 + t + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}}_{>0} > 1 + t$, donc : $\forall t > 0$, $f(t) > 1 + t$

12.) De 11.) on déduit pour $t > 0$ que : $0 \leq \frac{1}{t(f(t))^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2}$

Comme $\frac{1}{t(1+t)^2} \sim \frac{1}{t^3}$ et que $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors, par équivalent, $t \mapsto \frac{1}{t(f(t))^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(f(t))^2} dt$ est convergente.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(f(t))^2} dt$

Bilan : $\boxed{g \text{ possède une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$

13.) On a $\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{(1+X)^2}$
Alors, par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(1+X)^2} &= \frac{a}{X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{(1+X)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{X(1+X)^2} &= \frac{a(X+1)^2 + bX(1+X) + cX}{X(1+X)^2} \\ \Leftrightarrow 1 &= a(X+1)^2 + bX(1+X) + cX \\ \Leftrightarrow 1 &= (a+b)X^2 + (2a+b+c)X + a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a+b+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a+b+c = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{1+X} - \frac{1}{(1+X)^2}}$

14.) En intégrant $\frac{1}{t(f(t))^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2}$ entre 1 et $x > 1$, on a , avec 13.) :

$$g(x) \leq \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt \Rightarrow g(x) \leq [ln(t) - ln(1+t) + \frac{1}{1+t}]_1^x \Rightarrow g(x) \leq ln(x) - ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 0 + ln(2) - \frac{1}{2}$$

On en déduit : $\boxed{\forall x > 1, g(x) \leq ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{1+x} + ln(2) - \frac{1}{2}}$

15.) • Sur $]0, 1]$ on a $g(x) \leq 0 \leq ln(2)$

• Pour $x > 1$. Comme $\frac{x}{x+1} < 1$ alors $ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$ De plus $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} < 0$

Alors l'inégalité du 14.) donne : $\forall x > 1 \quad g(x) \leq ln(2)$

• Bilan : $\boxed{g \text{ est majorée par } ln(2) \text{ sur }]0, +\infty[}$

Centrale PC 2025, Mathématiques 2

Q1) Dans cette question $g = \sin$. Donc g est C^1 et on peut appliquer le théorème des accroissements finis et obtenir : $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$, $g(t) - g(s) = g'(u)(t - s)$ avec $u \in [s, t]$ ou $u \in [t, s]$

Comme $g' = \cos$ alors, $|g'(u)| \leq 1$ et donc $|g(t) - g(s)| \leq |t - s|$

Donc si $|t - s| \leq h$ alors $|g(t) - g(s)| \leq h$

Comme $\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|$ on en déduit que $\omega_{\sin}(h)$ est bien défini et que : $\boxed{\omega_{\sin}(h) \leq h}$

Q2) a) • Si $h > 0$ il existe des couples $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|t - s| \leq h$ et donc $\omega_g(h)$ est le sup d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc $\omega_g(h)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Il reste à voir que $\omega_g(h)$ est fini.

• Mais g est continue sur $[0, 2\pi]$ donc g est bornée sur $[0, 2\pi]$ et il existe $\exists M > 0$, $|g(x)| \leq M$

Comme g est 2π périodique alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq M$

Par inégalité triangulaire : $|g(t) - g(s)| \leq |g(t)| + |g(s)| \leq 2M$

En passant au sup, on a : $\omega_g(h) \leq 2M$ et donc $\omega_g(h) < +\infty$ et $\omega_g(h)$ est donc un réel.

Bilan : $\boxed{\text{Si } g \in C_{2\pi}^0 \text{ alors } \omega_g(h) \text{ est un réel bien défini.}}$

Q2) b) • Si de plus g est C^1 alors avec le théorème des accroissements finis :

$$|g(t) - g(s)| = |g'(u)| |t - s|$$

$\|g'\|_\infty$ est bien définie car g' est continue et 2π périodique (comme pour g au 2a)),

donc si de plus $|t - s| \leq h$ alors : $|g(t) - g(s)| \leq \|g'\|_\infty h$

En passant au sup, on a donc : $\boxed{\forall h > 0, \omega_g(h) \leq \|g'\|_\infty h}$

• On a : $0 \leq \omega_g(h) \leq \|g'\|_\infty h$, donc par encadrement : $\boxed{\lim_{h \rightarrow 0^+} \omega_g(h) = 0}$

Q3) a) Si $h \leq h'$ alors $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2, |s - t| \leq h\} \subset \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, |s - t| \leq h'\}$

Donc, en passant au sup : $\omega_h(g) \leq \omega_{h'}(g)$

On a donc : $\boxed{h \leq h' \Rightarrow \omega_h(g) \leq \omega_{h'}(g)}$

Q3) b) • Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|s - t| \leq h + h'$

Comme les quantités étudiées sont symétriques en s et t , on peut supposer, quitte à échanger s et t , que : $t \leq s$

On a donc : $0 \leq s - t \leq h + h'$ et on distingue alors deux cas :

Cas 1 : $0 \leq s - t \leq h$

Alors comme $0 \leq s - t \leq h$ on a $|g(s) - g(t)| \leq \omega_g(h)$ et comme $\omega_g(h') \geq 0$ on a :

$$|g(s) - g(t)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$$

Cas 2 : $h < s - t \leq h + h'$

Alors, en retranchant h à l'inégalité ci-dessus : $0 < s - t - h \leq h'$

On a alors : $|g(s) - g(t)| = |g(s) - g(s - h) + g(s - h) - g(t)|$ et par inégalité triangulaire :

$$|g(s) - g(t)| \leq |g(s) - g(s - h)| + |g(s - h) - g(t)|$$

Mais $s - (s - h) = h \leq h$ donc $|g(s) - g(s - h)| \leq \omega_g(h)$ et $(s - h) - t \leq h'$ (voir ci-dessus) et on donc $|g(s - h) - g(t)| \leq \omega_g(h')$ et on a donc $|g(s) - g(t)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$

• Dans tout les cas on a : $|g(s) - g(t)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $|s - t| \leq h + h'$

En passant au sup, on obtient donc : $\boxed{\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')}$

Q3) c) • Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$

Initialisation : pour $n = 1$, le résultat est évident puisque si $n = 1$ alors : $\omega_g(nh) = n\omega_g(h)$

Hérédité : On suppose le résultat vrai au rang n et on le montre au rang $n + 1$.

On a alors : $\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$

Mais en utilisant le b) : $\omega_g((n + 1)h) = \omega_g(nh + h) \leq \omega_g(nh) + \omega_g(h) \leq n\omega_g(h) + \omega_g(h) = (n + 1)\omega_g(h)$

On a bien le résultat au rang $n + 1$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$ }

• Si $\lambda > 0$ alors par définition de la partie entière : $\lfloor \lambda \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \lambda \rfloor + 1 \leq \lambda + 1$

On a donc : $\lambda h \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)h$ et avec le a) : $\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h)$

On utilise maintenant le b) pour avoir : $\omega_g(\lambda h) \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_g(h)$

Et comme $(\lfloor \lambda \rfloor + 1) \leq \lambda + 1$ alors : $\omega_g(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega_g(h)$

On a bien : $\boxed{\forall \lambda > 0$, $\omega_g(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega_g(h)$ }

Q4) Soit $g \in C_{2\pi}^0$. Par la relation de Chasles : $\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)dt = \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t)dt$

On effectue le changement de variable $u = t + \pi$ dans la première intégrale et le changement de variable $u = t - \pi$ dans la dernière intégrale.

On a alors : $\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)dt$

$$= \int_x^0 g(u - \pi)du + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int_0^x g(u + \pi)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int_0^x (g(u + \pi) - g(u - \pi))dt \text{ mais } g(u + \pi) - g(u - \pi) = 0 \text{ car } g \text{ } 2\pi \text{ périodique}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$$

Donc : $\boxed{\forall g \in C_{2\pi}^0$, $\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$ }

Q5) • Soit $(p, q) \in T_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \Delta(p + \alpha q)(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (p + \alpha q)(x - t)g(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (p(x - t) + \alpha q(x - t))g(t)dt \text{ linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} p(x - t)g(t)dt + \alpha \int_{-\pi}^{\pi} q(x - t)g(t)dt \\ &= \Delta(p)(x) + \alpha \Delta(q)(x) \end{aligned}$$

On a donc $\Delta(p + \alpha q) = \Delta(p) + \alpha \Delta(q)$ et on a donc la linéarité de Δ .

• Soit $p \in T_n$, on écrit p sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$

Alors : $\Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x - t)g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik(x-t)}g(t)dt = \sum_{k=-n}^n [\int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{-ikt}g(t)dt]e^{ikx}$

Avec cette dernière écriture on voit que $\Delta(p) \in T_n$

• Finalement on a Δ linéaire de T_n dans T_n et donc Δ est un endomorphisme de T_n

Q6) Soit t un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$. Alors :

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n (e^{it})^k$$

Vu la condition sur t : $e^{it} \neq 1$ et on peut utiliser la somme des termes d'une suite géométrique pour avoir

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-\frac{nit}{2}} - e^{\frac{(n+2)it}{2}}}{e^{it/2} - e^{it/2}} = \frac{e^{-\frac{(n+1)it}{2}} - e^{\frac{(n+1)it}{2}}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{-2i \sin((n+1)\frac{t}{2})}{-2i \sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Pour l'expression de f_n il suffit d'élever à la puissance 4.

Conclusion : Si t un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$ alors : $\varphi_n(t) = \frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$ et $f_n(t) = \left(\frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^4$

Q7) On peut écrire que : $e^{ni\frac{t}{2}}\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{ikt}$

Donc, en élevant au carré : $e^{int}(\varphi_n(t))^2 = \left(\sum_{k=0}^n e^{ikt} \right)^2$

On peut donc trouver $(a_0, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tel que : $e^{int}(\varphi_n(t))^2 = \sum_{k=0}^{2n} a_k e^{ikt}$

Et donc $(\varphi_n(t))^2 = \sum_{k=0}^{2n} a_k e^{i(k-n)t}$

qui peut se ré-indexer posant $\ell = k - n$ en : $(\varphi_n(t))^2 = \sum_{\ell=-n}^n a_{\ell+n} e^{i\ell t}$

On en déduit $\varphi_n^2 \in T_n$ On démontre de même que : $\varphi_n^4 \in T_{2n}$

Bilan : $\varphi_n^2 \in T_n$ et $f_n \in T_{2n}$

Q8) Avec les expressions initiales de φ_n et de f_n on voit clairement que ces deux fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)dt$ est bien définie.

Comme f_n est clairement réelle, non nulle et positive (avec l'expression de Q6) on en déduit que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)dt \neq 0$$

Si on pose $c_n = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)dt}$ on a alors : $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t)dt = 1$

Q9) f_n est paire d'après l'expression de Q6), donc J_n est aussi paire.
On a aussi : $t \mapsto |t| J_n(t)$ paire et donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)dt = 2 \int_0^{\pi} t J_n(t)dt = 2c_n \int_0^{\pi} t f_n(t)dt$$

Mais on a aussi par parité : $c_n = \frac{1}{2 \int_0^{\pi} f_n(t)dt}$ donc $2c_n = \frac{1}{\int_0^{\pi} f_n(t)dt}$

et finalement $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t)dt}{\int_0^{\pi} f_n(t)dt}$

Q10) $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin''(t) = -\cos(t) \leq 0$ donc $\sin$ est concave.
Donc la représentation graphique de $\sin|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$ est au dessous de sa tangente en $(0, 0)$ (la droite $y = t$), et au dessus de ses cordes, en particulier le segment $y = \frac{2}{\pi}t$ qui passe par $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$

On en déduit : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$

Remarque : on peut bien sûr étudier des fonctions ...

Q11) Pour $t \in [0, \pi]$ on a $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\frac{2}{\pi} \frac{t}{2} \leq \sin(\frac{t}{2}) \Rightarrow \frac{1}{\sin(t/2)} \leq \frac{\pi}{t}$

Donc, comme $\sin((n+1)\frac{t}{2}) \geq 0$: $\frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin(t/2)} \leq \pi \frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{t}$

En élevant à la puissance 4 : $f_n(t) \leq \pi^4 \frac{\sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^4}$ donc $t f_n(t) \leq \pi^4 \frac{\sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^3}$

En intégrant sur $[0, \pi]$: $\int_0^{\pi} t f_n(t)dt \leq \pi^4 \int_0^{\pi} \frac{\sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^3} dt$

Dans l'intégrale, on fait le changement de variable $u = (n+1)\frac{t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2u}{n+1}$ donc $dt = \frac{2}{n+1} du$ et on a :

$$\int_0^{\pi} t f_n(t)dt \leq \pi^4 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{\frac{2^3}{(n+1)^3} u^3} \frac{2}{n+1} du$$

Et donc : $\int_0^{\pi} t f_n(t)dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du$

Q12) Pour $t \in [0, \pi]$ on a $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\sin(\frac{t}{2}) \leq \frac{t}{2}$ avec Q10)

Alors $\frac{2}{t} \leq \frac{1}{\sin(t/2)}$ donc $\frac{2\sin((n+1)\frac{t}{2})}{t} \leq \frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin(t/2)}$ et en élevant à la puissance 4 : $\frac{2^4 \sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^4} \leq f_n(t)$

En intégrant sur $[0, \pi]$: $\int_0^\pi \frac{2^4 \sin^4((n+1)\frac{t}{2})}{t^4} dt \leq \int_0^\pi f_n(t) dt$

Dans l'intégrale on fait le changement de variable $u = (n+1)\frac{t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2u}{n+1}$ donc $dt = \frac{2}{n+1} du$ et on a :

$$\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{2^4 \sin^4(u)}{(\frac{2^4}{(n+1)^4} u^4) \frac{2}{n+1}} du \leq \int_0^\pi f_n(t) dt$$

Et donc : $\boxed{2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du \leq \int_0^\pi f_n(t) dt}$

Q13) • Avec Q12) : comme $\frac{\sin^4(u)}{u^4} \geq 0$ et que : $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \int_0^{(1+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du + \int_{(1+1)\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du$ alors

$$\int_0^\pi \frac{\sin^4(u)}{u^4} du \leq \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du \leq \int_0^\pi f_n(t) dt$$

En inversant : $\frac{1}{\int_0^\pi f_n(t) dt} \leq \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{1}{\int_0^\pi \frac{\sin^4(u)}{u^4} du}$

• Avec Q11) : $\int_0^\pi t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du$

La dernière intégrale est bien convergente (comparaison à Riemann en $+\infty$)

• En multipliant ces 2 inégalités (termes positifs) :

$$\frac{\int_0^\pi t f_n(t) dt}{\int_0^\pi f_n(t) dt} \leq \frac{1}{(2n+1)^3} \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{4} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^3} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}$$

On a $n+1 \leq 2n+1$ donc $\frac{\int_0^\pi t f_n(t) dt}{\int_0^\pi f_n(t) dt} \leq \frac{\pi^4}{4} \underbrace{\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)^3}_{\leq 1} \frac{1}{n+1} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}$

Donc en posant : $a = \frac{\pi^4}{4} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}$ et en utilisant Q9) on a : $\boxed{\int_{-\pi}^\pi |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}}$

Q14) • On effectue dans $T_n(g)(x)$ le changement de variable $u = x - t$ et on obtient :

$$T_n(g)(x) = \int_{\pi+x}^{-\pi+x} J_n(u) g(x-u) (-du) = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} J_n(u) g(x-u) du$$

En reposant $t = u$ et en utilisant la question Q4) on obtient :

$$\boxed{T_n(g)(x) = \int_{-\pi}^\pi J_n(t) g(x-t) dt}$$

• Comme $\int_{-\pi}^\pi J_n(t) dt = 1$ en multipliant par $g(x)$ qui ne dépend pas de t on obtient : $\boxed{\int_{-\pi}^\pi J_n(t) g(x) dt = g(x)}$

• Avec les deux expressions précédentes :

$$T_n(g)(x) - g(x) = \int_{-\pi}^\pi J_n(t) g(x-t) dt - \int_{-\pi}^\pi J_n(t) g(x) dt = \int_{-\pi}^\pi J_n(t) (g(x-t) - g(x)) dt$$

Comme $J_n(t) \geq 0$ on a, par l'inégalité de la moyenne :

$$|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt$$

Q15) a) Comme g est 2π périodique alors g' est 2π périodique.
De plus g est C^1 donc g' est continue et 2π périodique et on peut définir $\|g'\|_\infty$

Comme g est C^1 on peut appliquer le théorème des accroissements finis pour avoir : $\exists \theta \in \mathbb{R}$,
 $g(x-t) - g(x) = g'(\theta)((x-t) - x) = g'(\theta)(-t)$, donc en prenant la valeur absolue :
 $|g(x-t) - g(x)| \leq |g'(\theta)| |t| \leq \|g'\|_\infty |t|$

On utilise cette inégalité avec Q14) et on a : $|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |t| \|g'\|_\infty dt = \|g'\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |t| dt$

Avec Q13) on a alors : $|T_n(g)(x) - g(x)| \leq \frac{a\|g'\|_\infty}{n+1}$ et en passant au sup sur $x \in \mathbb{R}$:

$$\|T_n(g) - g\|_\infty \leq \frac{a\|g'\|_\infty}{n+1}$$

Q15) b) En passant à la limite au a), on a par encadrements : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n(g) - g\|_\infty = 0$ et donc

$(T_n(g))$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$

Q16) a) $|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|)$ puisque $|(x-t) - x| = |t| \leq |t|$
En écrivant $\omega_g(|t|) = \omega(n \frac{|t|}{n})$ et en utilisant Q3) avec $\lambda = n|t|$ et $h = \frac{1}{n}$ on obtient :
 $\omega_g(|t|) \leq (1 + n|t|)\omega_g(\frac{1}{n})$

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|) \text{ donne alors : } |g(x-t) - g(x)| \leq (1 + n|t|)\omega_g(\frac{1}{n})$$

$$\text{Q16) b) D'après Q14) : } |T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt$$

$$\text{Avec le a) : } |T_n(g)(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) (1 + n|t|) \omega_g(\frac{1}{n}) dt \leq \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) 1 dt}_{=1} + n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |t| dt}_{\leq \frac{a}{n+1} \leq 1 \text{ par Q13)} \right) \omega_g(\frac{1}{n})$$

$$\text{On a donc : } |T_n(g)(x) - g(x)| \leq (1 + a)\omega_g(\frac{1}{n})$$

$$\text{En posant } b = 1 + a \text{ on a : } |T_n(g)(x) - g(x)| \leq b\omega_g(\frac{1}{n})$$

$$\text{Q16) c) En passant au sup sur } x \in \mathbb{R} \text{ au b) on obtient : } \|T_n(g) - g\|_\infty \leq b\omega_g(\frac{1}{n})$$

Comme il est admit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_g(\frac{1}{n}) = 0$, alors, par encadrements : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n(g) - g\|_\infty = 0$ et donc

$(T_n(g))$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$

Q17) T est de degré n , donc dans $\mathbb{C}$, si on ne tiens pas compte de l'ordre de multiplicité, T admet n racines.

Il reste alors à montrer que T n'admet pas de racine double.

Le résultat est évident pour $n = 1$ car $1 + X^1 = 1 + X$!!!

Raisonnons par l'absurde pour $n \geq 2$: Si X est une racine de T d'ordre au moins 2 :

$$\text{alors } \begin{cases} T(X) = 0 \\ T'(X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + X^n = 0 \\ nX^{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ X = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2 \text{ donc } n-1 \geq 1)$$

Comme $1 \neq 0$ alors on a une absurdité.

Dans tout les cas T n'admet pas de racine au moins double, donc $\boxed{T \text{ admet } n \text{ racines simples dans } \mathbb{C}}$

Q18) Comme T est unitaire on déduit de Q17) et des notations introduites par l'énoncé que : $T =$

$$\prod_{j=1}^n (X - z_j)$$

$$\text{Si on dérive : } T' = \sum_{p=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n (X - z_j)$$

$$\text{En évaluant en } z_k : T'(z_k) = \sum_{p=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n (z_k - z_j)$$

Le seul terme de la somme pour lequel il n'y pas de j tel que $z_k - z_j = 0$ est celui pour $p = k$ donc :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, T'(z_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)}$$

Q19) • Commençons par étudier E .

$$\text{D'après l'égalité donnée : } E(X) = \underbrace{\frac{X^\ell}{1 + X^n}}_{\deg = \ell - n} - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{X - z_k}$$

Cas 1 : $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

On fait alors tendre X vers $+\infty$ ci-dessus et on obtient : $\lim_{X \rightarrow +\infty} E(X) = 0$ puisque $\ell - n < 0$

Comme E est un polynôme on en déduit que c'est le polynôme nulle (il est borné, donc constant, et comme sa limite est nulle ...).

Cas 2 : $\ell = n$

De même, on fait alors tendre X vers $+\infty$ ci-dessus et on obtient : $\lim_{X \rightarrow +\infty} E(X) = 1$

Pour les mêmes raison E est le polynôme constant égale à 1.

• En multipliant $F = \frac{X^\ell}{1+X^n} = \frac{X^\ell}{T} = \sum_{K=1}^n \frac{\mu_K}{X - z_K} + E$ par $T = \prod_{j=1}^n (X - z_j)$ on obtient :

$$X^\ell = \sum_{K=1}^n \mu_K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq K}}^n (X - z_j) + E \times T(X)$$

$$\text{En évaluant en } X = z_k : z_k^\ell = \sum_{K=1}^n \mu_K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq K}}^n (z_k - z_j) + E \underbrace{T(z_k)}_{=0}$$

$$\text{Donc } z_k^\ell = \mu_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)$$

Avec Q18) : $z_k^\ell = \mu_k T'(z_k) = \mu_k n z_k^{n-1}$
On multiplie par z_k et on a : $z_k^{\ell+1} = \mu_k T'(z_k) = \mu_k n z_k^n$
Mais $T(z_k) = 0 \Rightarrow 1 + z_k^n = 0 \Rightarrow z_k^n = -1$ donc $z_k^{\ell+1} = -\mu_k n$

On en déduit donc : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_k = \frac{-z_k^{\ell+1}}{n}$

Q20) • Comme E est un polynôme constant, on a par dérivation : $F' = \sum_{k=1}^n \frac{-\mu_k}{(X-z_k)^2}$

On a donc $F'(1) = \sum_{k=1}^n \frac{-\mu_k}{(1-z_k)^2}$

Avec le résultat de Q19) : $F'(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}$

• D'autre part : $F'(X) = \frac{\ell X^{\ell-1}(1+X^n) - nX^{n-1}X^\ell}{(1+X^n)^2}$ et donc en $X = 1$: $F'(1) = \frac{2\ell-n}{4}$

• Ave les deux expressions de $F'(1)$ on a :

$$\frac{2\ell-n}{4} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2} \Rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2} \Rightarrow \ell = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}$$

Q21) a) • On remarque que : $\Phi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto XP'(X) - \frac{n}{2}P(X) - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k-1)^2}$
est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$

Soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\Phi(X^\ell) = X \ell X^{\ell-1} - \frac{n}{2} X^\ell - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k z_k^\ell X^\ell}{(z_k-1)^2} = X^\ell \underbrace{\left(\ell - \frac{n}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2} \right)}_{=0 \text{ d'après Q20)} = 0$$

On a donc Φ qui est nul sur une base, donc, par linéarité, Φ est nul. On en déduit alors :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k-1)^2}$$

Q21) b) En appliquant la formule du a) avec $P = 1$ on a :

$$0 = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k-1)^2} \text{ et donc } \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{4}$$

Q22) • Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $z \mapsto |P(z)|$ est une application continue.

Comme $\{z \in \mathbb{C} | z| = 1\}$ est le cercle unité et est donc fermé borné, alors on a un fonction continue sur un fermée bornée, qui est donc bornée et qui atteint ses bornes.

Donc $\|P\|$ est bien définie et le sup est même un max.

• Soit $(P, Q, \lambda) \in \mathbb{C}[X]^2 \times \mathbb{C}$

i) $\|P\| \geq 0$ de manière évidente.

ii) $\|\lambda P\| = \sup_{|z|=1} |\lambda P(z)| = \sup_{|z|=1} |\lambda| |P(z)| = |\lambda| \sup_{|z|=1} |P(z)| = |\lambda| \|P\|$

iii) $\|P\| = 0 \Rightarrow \sup_{|z|=1} |P(z)| = 0 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow P(z) = 0$

P est donc nul sur le cercle unité, on a un donc un polynôme qui a une infinité de racine et donc $P = 0$

iv) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$

Alors $|(P+Q)(z)| = |P(z) + Q(z)| \leq |P(z)| + |Q(z)|$ par inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

En utilisant la définition de $\|\cdot\|$: $|(P+Q)(z)| \leq \|P\| + \|Q\|$

On peut alors prendre le sup sur le cercle unité et on a : $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$

$$\text{On a donc : } \forall (P, Q, \lambda) \in \mathbb{C}[X]^2 \times \mathbb{C}, \begin{cases} \|P\| \geq 0 \\ \|\lambda P\| = |\lambda| \|P\| \\ \|P\| = 0 \Rightarrow P = 0 \\ \|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\| \end{cases}$$

On en déduit alors que : $\boxed{\|\cdot\| \text{ est une norme sur } \mathbb{C}[X]}$

Q23) Soit z un nombre complexe de module 1 que l'on écrit donc $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors : } \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-1)^2} = \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}))^2} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}(2i\sin(\theta/2))^2} = \frac{-1}{4\sin^2(\theta/2)} \in \mathbb{R}^-$$

Remarque : $\sin(\theta/2) \neq 0$ car $z \neq 1$

Bilan : $\boxed{\text{Si } z \text{ est nombre complexe de module 1 différent de 1 alors } \frac{z}{(z-1)^2} \text{ est un réel négatif.}}$

Q24) • Commençons par remarquer que : $z_k^n + 1 = 0 \Rightarrow |z_k^n| = |-1| = 1 \Rightarrow |z_k| = 1$

• Soit z un complexe de module 1 différent de 1.

$$\text{D'après Q21) : } zP'(z) = \frac{n}{2}P(z) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k z)}{(z_k - 1)^2}$$

Comme $|z| = 1$ alors $|P'(z)| = |zP'(z)|$ et donc, par inégalité triangulaire :

$$|P'(z)| \leq \frac{n}{2} |P(z)| + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k P(z_k z)}{(z_k - 1)^2} \right|$$

On utilise : $|P(z)| \leq \|P\|$ et $|P(z_k z)| \leq \|P\|$ puisque $|z| = |z_k z| = 1$ car $|z| = |z_k| = 1$

$$\text{Alors : } |P'(z)| \leq \frac{n}{2} \|P\| + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| \|P\|$$

$$\text{Mais, d'après Q23) } \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} < 0 \text{ donc : } \sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{-z_k}{(z_k - 1)^2} = \frac{n^2}{4} \text{ par Q21) b)}$$

$$\text{On a alors : } |P'(z)| \leq \frac{n}{2} \|P\| + \frac{2}{n} \frac{n^2}{4} \|P\| = n \|P\|$$

On a donc en passant au sup : $\sup_{\substack{|z|=1 \\ z \neq 1}} \|P'(z)\| \leq n \|P\|$

Mais comme $z \mapsto P'(z)$ est continue on a : $\sup_{|z|=1} \|P'(z)\| \leq n \|P\|$ et donc $\boxed{\|P'\| \leq n \|P\|}$

$$\text{Q25) Soit } Q \in T_n \text{ que l'on écrit } q(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

$$\text{Changement d'indice } p = n + k : q(x) = \sum_{p=0}^{2n} c_{p-n} e^{i(p-n)x} = e^{-inx} \sum_{p=0}^{2n} c_{p-n} e^{ipx}$$

$$\text{Posons } P = \sum_{p=0}^{2n} c_{p-n} X^p \text{ alors } q(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$$

Comme $|e^{ix}| = 1$ alors $|P'(e^{ix})| \leq \|P'\|$ et $|P(e^{ix})| \leq \|P\|$

De plus $|q(x)| = |P(e^{ix})|$, donc $\|q\|_\infty = \|P\|$

En dérivant $q : q'(x) = -ine^{-inx}P(e^{ix}) + e^{-i(n-1)x}P'(e^{ix})$ donc par inégalité triangulaire :
 $|q'(x)| \leq n|P(e^{ix})| + |P'(e^{ix})|$

Avec les résultats ci-dessus : $|q'(x)| \leq n||P|| + ||P'||$

Comme $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ alors, d'après Q24) : $||P'|| \leq 2n||P||$.

On reporte ci-dessus : $|q'(x)| \leq n||P|| + 2n||P|| = 3n||P||$

Et comme $||P|| = ||q||_\infty$ on a alors : $|q'(x)| \leq 3n||q||_\infty$

Et en passant au *sup* sur $\mathbb{R}$: $\boxed{||q'||_\infty \leq 3n||q||_\infty}$

Q26) • Si $y = 0$ la relation est évidente. On va la démontrer pour $y > 0$.

• Posons $\forall t > 0$, $\varphi(t) = t^\alpha = \exp(\alpha \ln(t))$
 Alors φ est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall t > 0$, $\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} > 0$ car $\alpha > 0$ et donc φ est croissante.

• Soit $y > 0$ et $x \geq y$

Alors comme φ est croissante et que $y \leq x$ alors $\varphi(y) \leq \varphi(x) \Leftrightarrow y^\alpha \leq x^\alpha \Leftrightarrow 0 \leq x^\alpha - y^\alpha$

• Soit $y > 0$. Posons maintenant : $\forall x \geq y$, $A(x) = (x - y)^\alpha - x^\alpha + y^\alpha$

Alors A est dérivable et $\forall x \geq y$, $A'(x) = \alpha(x - y)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} - 0 = \alpha((x - y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1})$

Comme $\alpha - 1 < 0$ alors $u \mapsto u^{\alpha-1}$ est décroissante et donc, comme $x - y \leq x$ on a : $(x - y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} \geq 0$ et donc A est croissante.

Mais $A(y) = 0$, donc $\forall x \in [y, +\infty[$, $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$

• En regroupant les résultats : $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y \leq x \Rightarrow 0 \leq x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha}$

Q27) Si on passe à la valeur absolue en Q26) on a : $|h_\alpha(x) - h_\alpha(y)| \leq |x - y|^\alpha$ et donc $\boxed{h_\alpha \text{ est } \alpha\text{-h\"old\'erienne.}}$

Q28) Pour $x > 0$: $\frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x - 0|^\beta} = \left| \frac{x^\alpha}{x^\beta} \right| = |x^{\alpha-\beta}|$

Mais, si $\alpha > \beta$, on a $\alpha - \beta > 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x - 0|^\beta} = +\infty$

et, si $\alpha < \beta$, on a $\alpha - \beta < 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x - 0|^\beta} = +\infty$

Si h_α était β höldérienne, on aurait en prenant $y = 0$: $|h_\alpha(x) - h_\alpha(0)| \leq K|x - 0|^\beta$ donc
 $0 \leq \frac{h_\alpha(x) - h_\beta(0)}{|x - 0|^\beta} \leq K$ ce qui est impossible vu que l'on a au moins une des deux limites ci-dessus.

On a donc : $\boxed{h_\alpha \text{ n'est pas } \beta \text{ höldérienne.}}$

Q29) On prend $y \in]0, 1[$ et $x \in]0, 1 - y[$ pour que tout les termes existent.

Posons alors $B(x) = (x + y)\ln(x + y) - x\ln(x) - (y - 1)\ln(1 - y)$ qui est dérivable sur $]0, 1 - y[$ avec
 $B'(x) = \ln(x + y) + \frac{x+y}{x+y} - \ln(x) - x\frac{1}{x} - 0 = \ln(x + y)$ Comme $x < 1 - y$ alors $x + y < 1$ et donc $B'(x) < 0$.
 On en déduit B décroissante.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} B(x) = y\ln(y) - (y - 1)\ln(1 - y) = \underbrace{y\ln(y)}_{<0} + \underbrace{(1 - y)\ln(1 - y)}_{\leq 0} \leq 0$, alors $\forall x \in]0, 1 - y[$, $B(x) \leq 0$

On a donc : $\boxed{\forall y \in]0, 1[, \forall x \in]0, 1 - y[, (x + y)\ln(x + y) - x\ln(x) \leq (y - 1)\ln(1 - y)}$

Q30) • On peut écrire Q29), sous la forme $\forall y \in]0, 1[, \forall x \in]0, 1 - y[, k(x + y) - k(x) \leq -k(1 - y)$

Comme k est continue sur $[0, 1]$ (la valeur donnée en 0 permet de prolonger $x \mapsto x \ln(x)$), alors on peut prolonger cette formule et écrire : $\forall Y \in [0, 1]$, $\forall X \in [0, 1 - Y]$, $k(X + Y) - k(X) \leq -k(1 - Y)$

- On fixe $\alpha \in]0, 1[$.

Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$. On suppose de plus que $0 \leq x < y \leq 1$

- On pose $X = x \in [0, 1]$ et $Y = y - x \in]0, 1[$ pour avoir : $y = X + Y$ et $x = X$ et l'inégalité précédente donne : $k(y) - k(x) \leq -k(1 - y + x) = -k(1 - u)$ avec $u = y - x$

- Montrons que $k(y - x) \leq k(y) - k(x)$

On pose $D(y) = k(y) - k(x) - k(y - x)$

D est C^1 et $D(y) = k'(y) - k'(y - x) = 1 + \ln(y) - (1 + \ln(y - x)) = \ln(y) - \ln(y - x) > 0$ car on prend $y > x$

Donc D est croissante sur $]x, 1[$ et $D(x) = k(x) - k(x) - k(0) = 0$ donc $D(y) \geq 0$

et donc $k(y - x) \leq k(y) - k(x)$ ou encore $k(u) \leq k(y) - k(x)$ avec $u = y - x$

- On a alors : la double inégalité : $k(u) \leq k(y) - k(x) \leq -k(1 - u)$ avec $u = y - x$

Ce qui donne :

$$|k(y) - k(x)| \leq \max(|k(u)|, |-k(1 - u)|) = \max(-k(u), -k(1 - u)) \leq -k(u) - k(1 - u)$$

- On utilise ce résultat pour majorer $\frac{|k(x) - k(y)|}{|x - y|^\alpha}$

$$\text{Alors : } \frac{|k(x) - k(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{-k(1 - u) - k(u)}{u^\alpha} = C(u) \text{ avec } C(u) = \frac{-(1 - u)\ln(1 - u) - u\ln(u)}{u^\alpha}$$

On va étudier C sur $]0, 1[$ car $u = y - x \in]0, 1[$

C est clairement continue sur $]0, 1[$. Voyons si elle est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

En 0 :

$$C(u) = \frac{-(1 - u)\ln(1 - u)}{u^\alpha} + \frac{-u\ln(u)}{u^\alpha} = \frac{-(1 - u)(-u + o(u))}{u^\alpha} + \frac{-u\ln(u)}{u^\alpha} = u^{\alpha - 1} + o(u^{\alpha - 1}) - u^{1 - \alpha}\ln(u) \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 0 \text{ car } 1 - \alpha > 0$$

Donc C est prolongeable par continuité en 0.

En 1 :

$$C(u) = \frac{-(1 - u)\ln(1 - u) - u\ln(u)}{u^\alpha} \xrightarrow[u \rightarrow 1]{} 0 \text{ Donc } C \text{ est prolongeable par continuité en 1.}$$

C peut donc être prolongée en une fonction continue sur $[0, 1]$ et on a alors une fonction continue sur un segment. On en déduit que C est bornée, donc $\exists M > 0$, $\forall u \in]0, 1[$, $C(u) \leq M$

Donc si $0 \leq x < y \leq 1$ on a : $\frac{|k(x) - k(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M$ qui sécrit : $|k(x) - k(y)| \leq M|x - y|^\alpha$

Le résultat est évident pour $x = y$ et est aussi vrai, par symétrie pour $x > y$.

On a donc $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $|k(x) - k(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ et donc $\boxed{\forall \alpha \in]0, 1[, k \text{ est } \alpha\text{-h\"old\'erienne.}}$

Q31) • Soit $f \in H_{2\pi}^\alpha$

Fixons $x \in \mathbb{R}$.

On sait que : $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow y} 0$ car $\alpha \in]0, 1[$

On a donc f continue. Comme on savait déjà que f était 2π périodique alors : $f \in C_{2\pi}^0$

On a donc $H_{2\pi}^\alpha \subset C_{2\pi}^0$

• $H_{2\pi}^\alpha$ est clairement non vide, puisque la fonction nulle est dans cet ensemble.

• Soit $(f, g) \in (H_{2\pi}^\alpha)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |\lambda| |g(x) - g(y)| \\ &\leq K_f |x - y|^\alpha + |\lambda| K_g |x - y|^\alpha = (K_f + |\lambda| K_g) |x - y|^\alpha \end{aligned}$$

On en déduit $f + \lambda g$ α -höldérienne donc $f + \lambda g \in H_{2\pi}^\alpha$

• On a donc $H_{2\pi}^\alpha$ est une partie non vide, stable par combinaison linéaire de $C_{2\pi}^0$, donc :

$$\boxed{H_{2\pi}^\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de } C_{2\pi}^0}$$

Q32) • On a $g \in C_{2\pi}^0$, donc on peut utiliser le 16b) pour trouver $T_n g$ telle que $\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(\frac{1}{n})$

Mais d'après la question Q8) $J_n \in T_{2n}$ et donc $T_n g \in T_{2n}$

On a donc $\delta_{2n}(g) \leq \|g - T_n g\|_\infty \leq b \omega_g(\frac{1}{n})$

Mais g α -höldérienne donne : $w_g(h) \leq K h^\alpha$ donc : $\delta_{2n}(g) \leq \|g - T_n g\|_\infty \leq K b \frac{1}{n^\alpha}$

On en déduit donc $\delta_{2n}(g) = O(\frac{1}{n^\alpha})$

Puisque $T_{2n} \subset T_{2n+1} \subset T_{2n+2}$ alors : $\delta_{2n+2}(g) \leq \delta_{2n+1}(g) \leq \delta_{2n}(g)$ et donc $\delta_{2n+1}(g) = O(\frac{1}{n^\alpha})$

Finalement : $\boxed{\delta_n(g) = O(\frac{1}{n^\alpha})}$

Q33) • On a $\delta_n(f) = \inf_{p \in T_n} \|f - p\|_\infty$

Comme on peut choisir p égale à la fonction nulle qui est bien dans T_n alors : $\delta_n(f) \leq \|f\|_\infty$

• Posons $\Omega = \{p \in T_n, \|f - p\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$

Alors : $\# \Omega$ est non vide puisqu'il contient la fonction nulle.

$\# \Omega$ est bornée puisque, par la deuxième inégalité triangulaire et par la définition de Ω :

$$\|p\|_\infty - \|f\|_\infty \leq \|p - f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \|p\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$$

$\# \Omega$ est fermé car : $\Omega = \rho^{-1}([0, \|f\|_\infty])$ avec $\rho : p \in T_n \mapsto \|p - f\|_\infty$ qui est une application continue.

• $p \mapsto \|f - p\|_\infty$ est donc une application continue qui atteint ses bornes sur Ω puisque Ω est une partie fermée bornée de T_n

Donc $\exists q_n \in T_n, \forall p \in \Omega, \|f - p\|_\infty \geq \|f - q_n\|_\infty = \inf_{p \in T_n} \|f - p\|_\infty$

• Comme pour $p \notin \Omega$ on a : $\|p - f\| \geq \|f\|_\infty \geq \delta_n(f)$ alors on en déduit : $\delta_n(f) = \|f - q_n\|_\infty$

• Conclusion : $\boxed{\exists q_n \in T_n, \delta_n(f) = \|f - q_n\|_\infty}$

Q34) Posons $q_n = p_{n+1} - p_n$, alors $q_n \in T_{2^{n+1}}$, on peut donc appliquer Q25) et obtenir :
 $\|p'_{n+1} - p'_n\| \leq 3 \times 2^{n+1} \|p_{n+1} - p_n\|_\infty$

Mais $\|p_{n+1} - p_n\|_\infty = \|p_{n+1} - f + f - p_n\|_\infty$ et par inégalité triangulaire on a :
 $\|p_{n+1} - p_n\|_\infty \leq \|p_{n+1} - f\|_\infty + \|f - p_n\|_\infty$

On utilise la définition de $\delta_{2^{n+1}}$ pour avoir : $\|p_{n+1} - p_n\|_\infty \leq 2\delta_{2^{n+1}}(f)$

Mais, par hypothèse : $\delta_{2^{n+1}}(f) = O(\frac{1}{(2^{n+1})^\alpha}) = O(2^{-\alpha(n+1)})$ Donc il existe une constante $M > 0$ telle que :
 $\delta_{2^{n+1}}(f) \leq M2^{-\alpha(n+1)}$

En reportant ci-dessus : $\|p_{n+1} - p_n\|_\infty \leq 2M2^{-\alpha(n+1)}$

On reporte encore dans $\|p'_{n+1} - p'_n\| \leq 3 \times 2^{n+1} \|p_{n+1} - p_n\|_\infty$
et on obtient : $\|p'_{n+1} - p'_n\| \leq 6M2^{n+1}2^{-\alpha(n+1)} = \underbrace{6M2^{1-\alpha}}_{C'} 2^{n(1-\alpha)}$

On a donc : $\boxed{\exists C' > 0, \|p'_{n+1} - p'_n\| \leq C'2^{n(1-\alpha)}}$

Q35) On remarque $p_n = p_0 + \sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1})$, donc en dérivant : $p'_n = p'_0 + \sum_{k=1}^n (p'_k - p'_{k-1})$

Par inégalité triangulaire : $\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \sum_{k=1}^n \|p'_k - p'_{k-1}\|_\infty$

On utilise alors Q34) et on a : $\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \sum_{k=1}^n C'2^{(k-1)(1-\alpha)}$

Somme des termes d'une série géométrique de raison $2^{1-\alpha}$

$$\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + C' \frac{1-2^{n(1-\alpha)}}{1-2^{1-\alpha}} \Rightarrow \|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + C' \frac{2^{n(1-\alpha)}-1}{2^{1-\alpha}-1} \Rightarrow \|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + C' \frac{2^{n(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha}-1}$$

On a donc : $\boxed{\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1} 2^{n(1-\alpha)}}$

Q36) On a : $2^{n(1-\alpha)} \geq 1$ puisque $\alpha \in]0, 1[$ donc $\|p'_0\|_\infty \leq 2^{n(1-\alpha)} \|p'_0\|_\infty$

Reporter en Q35) : $\|p'_n\|_\infty \leq 2^{n(1-\alpha)} \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1} 2^{n(1-\alpha)} = 2^{n(1-\alpha)} \underbrace{\left[\|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1} \right]}_A 2^{n(1-\alpha)}$

Donc : $\boxed{\exists A > 0, \|p'_n\|_\infty \leq A2^{n(1-\alpha)}}$

Q37) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f(x) - f(y) = f(x) - p_n(x) + p_n(x) - p_n(y) + p_n(y) - f(y)$ donc par inégalité triangulaire :
 $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - p_n(x)| + |p_n(x) - p_n(y)| + |p_n(y) - f(y)|$

Par définition de $\|f - p_n\|_\infty$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq 2\|f - p_n\|_\infty + |p_n(x) - p_n(y)|$

Mais $\|f - p_n\|_\infty \leq 2\delta_{2^n}(f) \leq C \frac{1}{(2^n)^\alpha}$ donc : $|f(x) - f(y)| \leq 2C \frac{1}{(2^n)^\alpha} + |p_n(x) - p_n(y)|$

Mais $|p_n(x) - p_n(y)| \leq w_{p_n}(|x - y|) \leq \|p'_n\|_\infty |x - y|$ par le théorème des accroissements finis. Donc :
 $|f(x) - f(y)| \leq 2C \frac{1}{(2^n)^\alpha} + \|p'_n\|_\infty |x - y|$

En utilisant Q36), on obtient : $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq C2^{1-n\alpha} + A2^{(1-\alpha)n} |x - y|}$

Q38) On cherche une constante $K > 0$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha$
 Comme suggéré par l'énoncé on a considérer plusieurs cas.

cas 1 : $x = y$

Alors $|f(x) - f(y)| = 0 \leq K_1 |x - y|^\alpha$ avec $K_1 = 1$ par exemple.

cas 2 : $|x - y| > 1$

Alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$
 Comme $|x - y| > 1$ alors $|x - y|^\alpha > 1$ et donc $|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty |x - y|^\alpha$

On a : $|f(x) - f(y)| \leq K_2 |x - y|^\alpha$ avec $K_2 = 2\|f\|_\infty$

cas 3 : $0 < |x - y| \leq 1$

Comme suggéré choisissons $ns \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^n}$
 (possible car $(\frac{1}{2^n})$ est décroissante et tend vers 0 en partant de $1 \geq |x - y|$)

Alors, avec Q37) : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2C}{2^{n\alpha}} + \frac{A2^n}{2^{n\alpha}} |x - y|$

Mais $2^n |x - y| \leq 1$ donc : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2C}{2^{n\alpha}} + \frac{A}{2^{n\alpha}} = \frac{2C+A}{2^{n\alpha}} = \frac{(2C+A)2^\alpha}{2^{(n+1)\alpha}}$
 Mais $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x - y|$ donc $\frac{1}{2^{(n+1)\alpha}} \leq |x - y|^\alpha$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{(2C+A)2^\alpha}_K |x - y|^\alpha$

On a donc trouvé $K > 0$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha$

On a donc : $\boxed{f \text{ est } \alpha\text{-h\"old\'erienne.}}$