Chapitre 15 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 15.1

Soit $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = n$

Correction

Comme $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors les colonnes de A forment une base orthonormées et sont donc de normes 1 pour le produit scalaire canonique.
On a donc $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$
En sommant pour j variant de 1 à n on obtient : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = n}$

Enoncé, Exercice 15.2

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $(a, b, c) \in E^3$. Exprimer $[a + b, b + c, c + a]$ en fonction de $[a, b, c]$

Correction

Le produit mixte est un déterminant, on peut donc appliquer les mêmes méthodes de calculs.
En effectuant $C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3$ on a : $[a+b, b+c, c+a] = [2a+2b+2c, b+c, c+a] = 2[a+b+c, b+c, c+a]$
On fait maintenant $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ et on a : $[a + b, b + c, c + a] = 2[a + b + c, -a, -b]$
Puis $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ donne :
$[a + b, b + c, c + a] = 2[c, -a, -b] = 2[c, a, b] = -2[a, c, b] = 2[a, b, c]$ car échanger deux colonnes change le signe du produit mixte.

On a donc $\boxed{[a + b, b3, c + a] = 2[a, b, c]}$

Enoncé, Exercice 15.3

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
Soit f (respectivement g) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant A (respectivement B) comme matrice relativement à la base canonique.
Reconnaître f et g (donner la nature et les éléments caractéristiques)

Correction

$AA^T = I_2$ et $det(A) = 1$, donc f est une matrice de rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$
Par identification : $\begin{cases} cos(\theta) = \frac{3}{5} \\ sin(\theta) = \frac{4}{5} \end{cases}$
On peut par exemple prendre $\theta = arccos(\frac{3}{5})$

$BB^T = I_2$ et $det(B) = -1$ donc g est un réflexion.
Cherchons son axe. C'est-à-dire les éléments invariants ou encore $ker(B - I_2)$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ker(B - I_2)$
$\Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x = 2y$

g est donc la réflexion par rapport à la droite $x = 2y$

Bilan : $\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \theta = arccos(\frac{3}{5}) \text{ et } g \text{ est la réflexion de droite } x = 2y}$

Enoncé, Exercice 15.4

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
Donner les matrices, relativement à la base canonique, de f la rotation d'angle $-arcsin(\frac{2}{5})$ et de g la réflexion de droite $2x - 3y = 0$

Correction

On pose $\theta = -arcsin(\frac{2}{5})$, alors $sin(\theta) = -sin(arcsin(\frac{2}{5})) = -\frac{2}{5}$
$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1 \Rightarrow cos^2(\theta) = 1 - sin^2(\theta) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$
Comme $arcsin$ est à valeur dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors $cos(\theta) > 0$. On adonc : $cos(\theta) = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Remarque : N'hésiter par à faire un schéma et placer θ en fonction de son arcsin ...

La matrice de f, relativement à la base canonique qui est orthonormée est, d'après le cours :
$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \boxed{= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{21} & 2 \\ -2 & \sqrt{21} \end{pmatrix}}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à D et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

On note (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^1$

Alors, par définition de g :

$$\begin{cases} g(u) = -u \\ g(v) = v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(2i - 3j) = -2i + 3j \\ g(3i + 2j) = 3i + 2j \end{cases} \quad \text{linéarité de } g$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2g(i) - 3g(j) = -2i + 3j \\ 3g(i) + 2g(j) = 3i + 2j \end{cases} \quad 2L_1 + 3L_2 \text{ et } 2L_2 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13g(i) = 5i + 12j \\ 13g(i) = 12i - 5j \end{cases}$$

La matrice de g relativement à la base canonique (i, j) est donc :

$$\boxed{\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}}$$

On remarquera que cette matrice est symétrique, et que la trace est nulle car elle est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (dans une bonne base ...)

Enoncé, Exercice 15.5

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ Soit $P = vect(\vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer la matrice relativement à la base canonique de la réflexion de plan P.

Correction

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et si on note r la réflexion de plant P, alors : $\begin{cases} r(\vec{u}) = \vec{u} \\ r(\vec{v}) = \vec{v} \\ r(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$

En effet $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans P et $\vec{w} \in P^\perp$

On en déduit $M_{B'}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si on note Q la matrice de passage de B (la base canonique) à B' alors : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Par la formule de changement de bases : $M_B(r) = QM_{B'}(r)Q^{-1}$

On fait les calculs à la machine et on obtient la matrice cherchée qui vaut :

$$\boxed{\frac{1}{81}\begin{pmatrix} 49 & 8 & -64 \\ 8 & 79 & 16 \\ -64 & 16 & -47 \end{pmatrix}}$$

On remarque que cette matrice est symétrique réelle.

Enoncé, Exercice 15.6

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $B = (i, j, k)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ comme matrice relativement à la base canonique B.

a) Montrer que f est une rotation.
b) Déterminer un vecteur de son axe.
c) Déterminer son angle.
d) Faire un bilan.

Correction

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A alors : $\begin{cases} \|C_1\| = \frac{1}{9}(2^2 + 2^2 + 1) = 1 \\ \|C_2\| = \frac{1}{9}(1 + 2^2 + 2^2) = 1 \\ \|C_3\| = \frac{1}{9}(2^2 + 1 + 2^2) = 1 \\ C_1.C_2 = \frac{1}{9}(2 - 4 + 2) = 0 \\ \text{De même } C_1.C_3 = C_2.C_3 = 0 \end{cases}$

Donc on en déduit que les colonnes de A forment une base orthonormée et donc que A est une matrice orthogonale.

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Donc $C_1 \wedge C_2 = C_3$ et donc on en déduit que les colonnes de A forment une base orthonormée directe et donc $det(A) = 1$

Remarque : On a utilisé que $C_1 \wedge C_2 = det(A)C_3$. On peut aussi calculer $det(A)$ classiquement mais c'est long ...

On a alors $\begin{cases} AA^T = I_3 \\ det(A) = 1 \end{cases}$ donc $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et donc

$\boxed{f \text{ est une rotation vectorielle d'après le cours.}}$

b) Pour trouver un vecteur de l'axe on cherche les éléments invariants. On résout donc :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y-2z=3x\\2x-2y+z=3y\\-x-2y-2z=3z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x+y-2z=0\\2x-5y+z=0 \qquad L_3-L_1\\-x-2y-5z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z=-y\\x=3y\end{cases}$$

Posons $u=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, alors f est une rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u$ et d'angle θ

c) Soit $x=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ alors $x\perp u$ et donc d'après le cours : $f(x)=cos(\theta)x+sin(\theta)\frac{u}{||u||}\wedge x$

Matricielement :

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=cos(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+sin(\theta)\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}=cos(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+sin(\theta)\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}sin(\theta)=\frac{-\sqrt{11}}{6}\\cos(\theta)=\frac{-5}{6}\end{cases}$$

On en déduit que $\theta=-arccos(\frac{-5}{6})$

Bilan : $\boxed{f \text{ est la rotation d'axe orienté } \mathbb{R}u \text{ et d'angle } \theta \text{ avec } u=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ et } \theta=-arccos(\tfrac{-5}{6})}$

Enoncé, Exercice 15.7

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On note $B = (i, j, k)$ la base canonique. Soit r la rotation d'axe orienté par $i + j + j$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Déterminer la matrice de f relativement à la base B.

Correction

On pose $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

On a choisit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux et unitaires, donc en posant $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ on obtient $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée directe adaptée à f.

On a alors $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & cos(\frac{\pi}{3}) & -sin(\frac{\pi}{3})\\0 & sin(\frac{\pi}{3}) & cos(\frac{\pi}{3})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

On a $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

On note P la matrice de passage de B à B', alors : $P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\\\sqrt{2} & 0 & -2\end{pmatrix}$

Comme B et B' sont orthonormées alors $P^{-1} = P^T$

Par la formule de changement de bases : $M_B(f) = PM_{B'}P^{-1} = PM_{B'}P^T$

Après calculs, la matrice de f relativement à B est : $\boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}}$

Enoncé, Exercice 15.8

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $B = (i, j, k)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\2 & -1 & -2\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ comme matrice relativement à la base canonique B. Reconnaître f.

Correction

On commence par remarquer que $AA^T = I_3$ donc A est une matrice orthogonale, et comme la base canonique est orthonormée alors f est une isométrie vectorielle.
Comme de plus A est symétrique, alors $A^2 = I_3$, donc f est une symétrie.
En regroupant les deux résultats, f est une symétrie orthogonale. On cherche ses éléments invariants :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 = ker(A - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + 2y + z = 0$$

On a $dim(E_1) = 2$ et on a donc d'après le cours que :

$\boxed{f \text{ est une réflexion de plan d'équation cartésienne } -x + 2y + z = 0}$

Enoncé, Exercice 15.9

Soit S une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S + iI_n$ est inversible.

Correction

S est symétrique réelle donc, par le théorème spectrale son spectre est réel, et donc $-i \notin sp(S)$, ce qui implique $det(S + iI_n) = det(S - (-i)I_n) \neq 0$ et donc $\boxed{S + iI_n \text{ est inversible.}}$

Enoncé, Exercice 15.10

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint défini positif ($f \in S^{++}(E)$) de E.
Montrer qu'il existe $g \in S^{++}(E)$ tel que $g \circ g = f$

Correction

f est autoadjoint donc diagonalisable dans une base orthonormée B.
Dans cette base $M_B(f) = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec les $\alpha_i > 0$ puisque f est défini positif.
Posons g l'endomorphisme défini par sa matrice dans B : $M_B(g) = diag(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$
Alors on a facilement $M_B(g \circ g) = M_B(g)^2 = M_B(f)$ et donc $g \circ g = f$.
Comme de plus $M_B(g)$ est symétrique et B orthonormée alors $g \in S(E)$ et comme $sp(g) \subset]0, +\infty[$ alors $g \in S^{++}(E)$

On a bien : $\boxed{\text{il existe } g \in S^{++}(E) \text{ tel que } g \circ g = f}$