Feuille d'exercices n°42 : chap. 16

Exercice 358. *a) Montrer que* $\mathbb{N}^*$ *est dénombrable.*
b) Montrer que l'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
c) Montrer que l'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
d) Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ *alors* $\mathbb{N} \times [\![0;p]\!]$ *est dénombrable.*
e) Montrer que si $\begin{cases} A \text{ et } B \text{ sont dénombrables} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$*, alors* $A \cup B$ *est dénombrable.*

Exercice 359. *Dans cet exercice on veut démontrer, par* ***l'absurde****, que* $\Omega = \{0;1\}^{\mathbb{N}}$ *est non-dénombrable.*
Supposons que φ *est une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* Ω*. On note* $\varphi(n) = \underset{n}{\omega}$ *On a donc* $\underset{n}{\omega} \in \Omega$*.*
On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n = 1 - (\underset{n}{\omega})(n)$*.*
a) Montrer que $\theta \in \Omega$*.*
b) En utilisant θ *arriver à une absurdité et conclure l'exercice.*

Exercice 360. *($\star$)*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*. On définit* F *sur* $\mathbb{N}$*, par :*
$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ F(n) = f_n(n) + 1$
Montrer que $F \notin (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *est-il dénombrable ?*

Exercice 361. *($\star\star$)*
Dans cet exercice on veut montrer que $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{u_n\}$
a) Construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que :* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \notin [a_n, b_n]$
(on pourra "tricoter")
b) Montrer que $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*
c) Montrer que $[0,1[$ *n'est pas dénombrable.*

Exercice 362. *On admet que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ *et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Exercice 363. *On admet que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
Calculer $\sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$

Exercice 364. *Montrer que la famille* $(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable pour* $\alpha > 2$