Feuille d'exercices n°46 : chap. 16

Exercice 383. *Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.*
A l'instant initial, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement : "l'animal est en A après son n-ième trajet."
On note B_n l'événement : "l'animal est en B après son n-ième trajet."
On note C_n l'événement : "l'animal est en C après son n-ième trajet."
On pose $p(A_n) = a_n$, $p(B_n) = b_n$ et $p(C_n) = c_n$.
a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
c) Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n en utilisant une matrice.

Exercice 384. *($\star$)*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
On considère les événements $A =$"une infinité d'événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé et $B =$"il existe un certain rang à partir duquel tout les A_n sont réalisés.
a) Montrer que A et B sont des événements.
b) On suppose que les (A_n) sont mutuellement indépendant et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2}$.
Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$

Exercice 385. *($\star$)*
Deux joueurs A et B s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face.
Au départ le joueur A possède a euros et le joueur B possède b euros avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
A chaque défaite le perdant donne 1 euro au gagnant. Le joueur A à une probabilité p de gagner à chaque lancer. Avec $p \in]0; 1[$ et $p \neq \frac{1}{2}$.
Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.
On pose $N = a + b$ et $q = 1 - p$. On note p_n la probabilité que le joueur A finisse ruiné s'il commence la partie avec n euros et q_n la probabilité que le joueur B finisse ruiné s'il commence la partie avec $N - n$ euros.
a) Montrer que si $0 < a < N$, $p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$
b) En déduire l'expression de p_a en fonction de a, de p, de q et de N.
c) Calculer q_a puis $p_a + q_a$. Que peut-on en déduire ?
d) Même chose avec $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 386. *Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes; puis, on suppose que :*
- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7
Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», calculer $P(G_n)$.

Exercice 387. *On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un six.*
Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?