

Feuille d'exercices n°47 : chap. 16

Exercice 388. (★)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

a) Soit A, B et C trois événements. Montrer que :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

b) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Montrer que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i})$$

Exercice 389. (★) On lance n fois une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant $p \in]0; 1[$.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ?

b) Pour $k \in \llbracket 1..n \rrbracket$, quelle est la probabilité d'obtenir le $k^{\text{ième}}$ pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ?

Maintenant on considère que la pièce est équilibrée et on la lance $2n$ fois.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir n piles avant n faces ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir n piles avant $n + 1$ faces ?

Exercice 390. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire les boules deux par deux jusqu'à vider l'urne.

Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Exercice 391. On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'apparition de la séquence (Pile, Pile, Face) ?

Exercice 392. a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $E_a \Leftrightarrow y'(x) - 2y(x) = \frac{e^{2x}}{\cosh(x)}$

b) Résoudre sur $] -1; +\infty[$ l'équation différentielle : $E_b \Leftrightarrow (1+t)y'(t) + y(t) = 1 + \ln(1+t)$

Exercice 393. (★)

Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{\alpha+x}{1+x^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 394. Soit $E \Leftrightarrow t^2 y'(t) - y(t) = 0$

a) Résoudre E sur I un intervalle ne contenant pas 0

On cherche maintenant à résoudre E sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire à trouver les fonctions y , dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant E pour $t \in \mathbb{R}$

b) Trouver une solution évidente au problème posé.

Supposons maintenant que y soit une solution de E sur $\mathbb{R}$

c) Calculer $y(0)$

d) A l'aide du a), exprimer y à l'aide de deux constantes.

e) En écrivant que y est continue en 0, trouver une des deux constantes.

f) Réciproquement, montrer que les fonctions trouvées au e) sont bien solution de E sur $\mathbb{R}$

g) Conclure l'exercice.

Exercice 395. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $ty'(t) - 2y(t) = t^3$