Chapitre 15 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien Matrices symétriques réelles

Dans ce chapitre $(E, <, >)$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n.
On note $||.||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire.

1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1.1 Définition

Un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, <, >)$ est une isométrie vectorielle
si et seulement si il conserve la norme.

Remarques. *Autrement dit $f \in L(E)$ est une isométrie si et seulement si f conserve les distances.*
iso <-> conserve ; métrie <-> la distance

1.2 Autres caractérisation

Théorème . *Soit $f \in L(E)$. Alors on a équivalence des propositions suivantes :*

i) f est une isométrie vectorielle
ii) $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$
iii) $\forall (x, y) \in E^2$, $< f(x), f(y) >=< x, y >$
iv) Il existe une base orthonormée B telle que $f(B)$ soit une base orthonormée.
v) Pour toute base orthonormée B, $f(B)$ est une base orthonormée.
vi) Si B est une base orthonormée de E alors : $Mat_B(f)^T Mat_B(f) = I_n$

Remarque. *On dit que f conserve le produit scalaire et les bases orthonormées.*
On reviendra sur la caractérisation vi) un peu plus tard.

preuve :

1.3 Exemple : symétries orthogonales

1.3.1 Rappels

Définitions. *Soit F un sous espace vectoriel de E. Alors la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$ est appelée symétrie orthogonale par rapport à F.*
Si de plus F est un hyperplan alors on dit que l'on a une réflexion.

DESSIN :

1.3.2 Propriété

Lemme. *Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.*

preuve :

1.4 Structure de groupe

1.4.1 Définitions

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de $(E, <, >)$.
On dit que : $O(E)$ est le groupe orthogonal de $(E, <, >)$.

Remarque. *La notion de groupe est hors programme.*

1.4.2 Propriétés

Propriétés. $\begin{cases} i) & Id_E \in O(E) \\ ii)\ \forall f \in O(E)\ , & f \in GL(E) \ \ et \ \ f^{-1} \in O(E) \\ iii)\ \forall (f,g) \in O(E)^2\ , & f \circ g \in O(E) \end{cases}$

Remarques. *On peut résumer ceci en* $O(E)$ *est non vide et* $\forall (f,g) \in O(E)^2\ ,\ f \circ g^{-1} \in O(E)$
On dit que $O(E)$ *est un groupe.*

preuve :

1.5 Stabilité de l'orthogonal d'un sous espace stable

Propriété. *Soit* $f \in O(E)$ *et* F *un sous espace vectoriel de* E*. Alors :*

F *est stable par* $f \Rightarrow$ $F^{\perp}$ *stable par* f

Remarque. *Les restrictions de* f *à* F *et* $F^{\perp}$ *sont des isométries vectorielles.*

preuve :

2 Matrices orthogonales

2.1 Introduction

La caractérisation des isométries vectorielles à l'aide de leur matrice dans une base orthonormée amène la définition suivante :

Définition. *On dit qu'une matrice de* $M_n(\mathbb{R})$ *est orthogonale si et seulement si* $M^T M = I_n$

Notation : On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

2.2 Autres caractérisations

Théorème . *Soit* $M \in M_n(\mathbb{R})$*. Alors on a équivalence des propositions suivantes :*
i) M *est une matrice orthogonale*
ii) $M^T M = I_n$
iii) $M M^T = I_n$
iv) les colonnes de M *forment une base orthonormée de* $M_{n,1}(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire canonique de* $M_{n,1}(\mathbb{R})$
v) les lignes de M *forment une base orthonormée de* $M_{1,n}(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire canonique de* $M_{1,n}(\mathbb{R})$

Remarque. *On a alors* $M^{-1} = M^T$

preuve :

2.3 Groupe orthogonal d'ordre n

Lemme. *Préliminaire : Déterminant d'une matrice orthogonale*
Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ *alors* $det(M) = 1$ *ou* $det(M) = -1$

Notation : On note $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

preuve :

Lemme. $\forall A, B \in O_n(\mathbb{R})\ ,\ \ AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$
$\forall A, B \in SO_n(\mathbb{R})\ ,\ \ AB^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$

Définitions. *On dit que* $O_n(\mathbb{R})$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *sont des groupes.*
$O_n(\mathbb{R})$ *est le groupe orthogonal et* $SO_n(\mathbb{R})$ *est le groupe spécial orthogonal.*

preuve :

2.4 Retour aux isométries vectorielles

2.4.1 Lien matrice orthogonale - endomorphisme orthogonale

Lemme. *Si B est une base orthonormée de E et si $f \in L(E)$ alors : $f \in O(E) \Leftrightarrow M_B(f) \in O_n(\mathbb{R})$.*

preuve :

2.4.2 Déterminants

Lemme. *Si $f \in O(E)$ alors $det(f) = 1$ ou $det(f) = -1$.*

preuve :

Remarques. *Si $f \in O(E)$ et si $det(f) = 1$ alors on dit que f est une isométrie vectorielle positive (ou directe).*
Si $f \in O(E)$ et si $det(f) = -1$ alors on dit que f est une isométrie vectorielle négative (ou indirecte).

Définition. *On pose $SO(E) = \{f \in O(E)\ ,\ det(f) = 1\}$.*
$SO(E)$ est appelé groupe spécial orthogonal.

Lemme. $\forall (f,g) \in O(E)^2\ ,\ f \circ g^{-1} \in O(E)$
$\forall (f,g) \in SO(E)^2\ ,\ f \circ g^{-1} \in SO(E)$

preuve :

2.5 Matrices de changements de bases orthonormées

Théorème . *Si B est une base orthonormée de E, si B' est une base de E, alors, en notant $P_B^{B'}$ la matrice de passage de B à B' : B' est une base orthonormée $\Leftrightarrow \quad P_B^{B'} \in O_n(\mathbb{R})$*

Corollaire. *L'inverse de la matrice de passage entre deux bases orthonormées est égale à sa transposée.*

Remarque. *$O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de changement de bases orthonormées.*

preuve :

3 Espace euclidien orienté de dimension 2 et 3

3.1 Orientation d'un espace euclidien

Orienter un espace euclidien c'est fixer une base orthonormée de **référence** B_r.

Alors, si B est une base orthonormée de E on a 2 possibilités :

$$\begin{cases} det_{B_r}(B) = 1 \text{ on dit alors que } B \text{ est une base orthonormée directe} \\ det_{B_r}(B) = -1 \text{ on dit alors que } B \text{ est une base orthonormée indirecte} \end{cases}$$

Remarque. *On peut montrer qu'il n'y a sur E que deux orientations possibles.*

Exemples. *Orientation d'une droite, d'un plan en dimension 3.*

3.2 Produit mixte

3.2.1 Définition

Définition. *Si $(E, <,>)$ est un espace euclidien orienté de dimension n et si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E.*
Alors on appelle produit mixte de $(u_1, \ldots, u_n)$ le déterminant de $(u_1, \ldots, u_n)$ dans une base orthonormée **directe** *quelconque de E.*
On note $[u_1, \ldots, u_n]$ cette valeur.

Justification de la définition :

3.2.2 Interprétation

Théorème . *En dimension 2, si $ABCD$ est un parallélogramme alors* $Aire(ABCD) = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|$

En dimension 3, si $ABCDEFGH$ est un parallélépipède alors $Volume(ABCDEFGH) = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]\right|$

3.3 Produit vectoriel en dimension 3

3.3.1 Définition

Définition. *Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien orienté* **de dimension 3**.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E.

Alors il existe un unique vecteur $\vec{a}$ dans E vérifiant : $\forall \vec{x} \in E \ , \ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] =< \vec{a}, \vec{x} >$
Ce vecteur $\vec{a}$ est appelé produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Justification de la définition :

3.3.2 Propriétés

Propriétés. *Avec les notations précédentes.* $\begin{cases} i)\ \forall \vec{x} \in E \ , \ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] =< \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} > \\ ii)\ \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ iii)\ (\vec{u} + \lambda \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \lambda \vec{v} \wedge \vec{w} \\ iv)\ \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0_E} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \text{ liée} \end{cases}$

v) Si B est une base orthonormée directe de E. Si $Mat_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Mat_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

alors : $Mat_B(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$

Remarques. *ii) et iii) disent que $\wedge$ est une forme bilinéaire antisymétrique ...*
$u \perp (u \wedge v)$
Si (i, j, k) est une base orthonormée alors : $i \wedge j = k$, $i \wedge k = -j$ etc ..

preuve :

4 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe E est un espace euclidien orienté de dimension 2.

4.1 $O_2(\mathbb{R})$

4.1.1 Etude

4.1.2 Bilan

Théorème . $M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M \in O_2(\mathbb{R})$ *et* $det(M) = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \ , \ M = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$

$M \in O_2(\mathbb{R})$ *et* $det(M) = -1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \ , \ M = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$

4.2 Isométrie indirecte

4.2.1 Etude

4.2.2 Bilan

Théorème . *Si f est une isométrie vectorielle* **indirecte** *en dimension 2 alors f est une réflexion.*

4.3 Isométrie directe

4.3.1 Préliminaires

Lemme. *Si on pose $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ alors :* $\begin{cases} \forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 \ , & R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta+\theta'} \\ & R_0 = I_2 \\ \forall\theta \in \mathbb{R} \ , & (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} \end{cases}$

Remarque. *Il y a donc* **commutativité** *dans $SO_2(\mathbb{R})$.*

preuve :

4.3.2 Rotations vectorielles

Définition. *Soit B une base orthonormée de E. Alors l'endomorphisme r_θ de E admettant $R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ comme matrice relativement à B est appelée rotation vectorielle d'angle θ.*

Lemme. *r_θ admet pour matrice R_θ relativement à n'importe quelle base orthonormée directe de E.*

Remarque. *$SO_2(\mathbb{R})$ est donc l'ensemble des matrices de rotations.*

preuve :

4.3.3 Interprétation

Avec l'image d'un vecteur $\begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$ ou avec les complexes.

4.3.4 Théorème

Théorème . *Les isométries vectorielles directes en dimension 2 sont les rotations.*

4.4 Classification des isométries vectorielles

Théorème . *Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 2.*
Alors : $\begin{cases} det(f) = 1 \Leftrightarrow f \text{ est une rotation} \\ det(f) = -1 \Leftrightarrow f \text{ est une réflexion} \end{cases}$

preuve :

4.5 Angle de deux vecteurs

Définition. *Si B est une base directe d'un espace euclidien $(E, <,>)$ de dimension 2. Si $\vec{u}, \vec{v} \in E \backslash \{0_E\}$.*

Alors il existe une rotation r d'angle θ telle que : $\frac{\vec{v}}{||v||} = r_\theta(\frac{\vec{u}}{||u||})$.

Alors θ est appelé angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est parfois noté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

Remarque. *θ est défini à 2π près.*

5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

Dans ce paragraphe E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

5.1 $O_3(\mathbb{R})$

5.1.1 Deux lemmes généraux préliminaires

On présente ici deux lemmes généraux utiles pour le paragraphe suivant. Ils ne sont pas inscrits dans le programme mais ils sont utiles pour la preuve du paragraphe suivant.

Lemme. *Si $f \in O(E)$ alors $sp(f) \subset \{-1; 1\}$.*

preuve :

Lemme. *Si $f \in O(E)$ et si $dim(E) = 3$ alors $sp(f) \neq \emptyset$.*

preuve :

5.1.2 Etude

5.1.3 Bilan

Théorème . *Soit $f \in O_3(E)$ alors il existe une base orthonormée B de E relativement à laquelle la matrice de f a l'une des formes suivantes :*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2 Isométrie directe : Rotation

5.2.1 Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et θ un nombre réel. Alors on appelle rotation d'axe orienté $\mathbb{R}\vec{u}$ et d'angle θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice relativement à une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Remarque. *Le premier vecteur de la base orthonormée directe, à savoir $\vec{u}$ et l'angle θ suffisent à définir la rotation.*

5.2.2 Interprétation

La restriction de la rotation à $\{u\}^{\perp}$ est une rotation du plan euclidien $\{u\}^{\perp}$.

5.2.3 Propriété

Propriété. *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et θ un nombre réel. Soit r la rotation d'axe orienté $\mathbb{R}\vec{u}$ et d'angle θ.*
Alors pour tout vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{x} \perp \vec{u}$ on a : $r(\vec{x}) = cos(\theta)\vec{x} + sin(\theta)\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} \wedge \vec{x}$
Alors pour tout vecteur $\vec{x}$ de E : $det(\vec{x}, r(\vec{x}), \vec{u})$ est du même signe que $sin(\theta)$

preuve :

5.2.4 Exemple

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est une matrice de rotation, déterminer l'axe et l'angle.

$(1, -1, 1)$ et $\frac{\pi}{3}$

5.3 Isométries indirectes : complément

Remarque. *Rien de préciser sur ce paragraphe dans le programme, en particulier pas de théorème de classification.*

5.3.1 Réflexion

Lemme. *L'endomorphisme ayant comme matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *relativement à une base orthonormée* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *est une réflexion de plan* $Vect(e_1, e_2)$.

preuve :

5.3.2 Composée rotation-réflexion

Lemme. *L'endomorphisme ayant comme matrice* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ *relativement à une base orthonormée* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *est la composée commutative de la réflexion de plan* $Vect(e_2, e_3)$ *et de la rotation d'axe orienté* $Vect(e_1)$ *et d'angle* θ.

preuve :

5.4 Classification des isométries vectorielles en dimension 3 : compléments

Théorème . *Les isométries vectorielles directes en dimensions 3 sont les rotations.*
Les isométries vectorielles indirectes en dimensions 3 sont les réflexions et les composées rotations-réflexions.

Remarque. *Soit* $A \in O_3(\mathbb{R})$.
Si $det(A) = 1$ *alors* A *est une matrice de rotation.*
Si $det(A) = -1$ *alors* A *est une matrice de réflexion ou de composée rotation-réflexion.*
De plus, si $A = A^T$ *on a une matrice de réflexion.*

6 Réductions des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

6.1 Définition

Définition. *On dit qu'un endomorphisme de* $(E, <, >)$ *est* **autoadjoint**
si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2 \ , \ < x, u(y) >=< u(x), y >$

Remarques. *On note* $S(E)$ *l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de* $(E, <, >)$
On dit "auto-adjoint" car l'endomorphisme est son propre "adjoint" (notion hors programme).

6.2 Matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une base orthonormée

Théorème . *Soit* f *un endomorphisme de* $(E, <, >)$ *et* B *une base orthonormée de* E.

Alors : f *autoadjoint* $\Leftrightarrow Mat_B(f)$ *est symétrique*

Remarques. *Il faut bien que* B *soit orthonormée !!! On parle aussi d'endomorphisme* **"symétrique"** *car la matrice est symétrique réelle mais attention endomorphisme symétrique* $\neq$ *symétrie !!*
Par isomorphisme d'espace vectoriel : $dim(S(E)) = dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$

6.3 Théorème spectral

6.3.1 Premier théorème

Théorème . *Si f est un endomorphisme autoadjoint de $(E,<,>)$ alors :*
i) F est un sous espace stable par $f \Rightarrow F^{\perp}$ stable par f
ii) les sous espace propres de f sont en somme directe orthogonale.

preuve :

6.3.2 Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoint

Théorème . *Tout endomorphisme* **autoadjoint** *d'un espace euclidien admet une base* **orthonormée** *de vecteurs propres.*

Remarque. *Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.*

preuve : non exigible

6.3.3 Théorème spectral pour les matrices symétriques réelles

Théorème . *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$,* **symétrique**. *Alors :*
$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale, telles que : $A = PDP^T = PDP^{-1}$

Remarques. *Déjà vu en partie dans le chapitre réduction.*
Autrement dit : Une matrice symétrique **réelle** *est diagonalisable dans une base orthonormée.*
Le résultat est faux pour une matrice symétrique complexe.
On peut aussi choisir $P \in SO_n(\mathbb{R})$

Exemples. $\bullet \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\bullet \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6.4 Projecteurs et symétries

6.4.1 Théorème

Théorème . *Si f est une symétrie ou une projection orthogonale, et si B est une base orthonormée alors :*
$M_B(f)$ est une matrice symétrique réelle.

preuve :

6.4.2 Projecteur autoadjoint

Théorème . *Soit p un projecteur d'un espace euclidien $(E,<,>)$. Alors :*
p est un projecteur orthogonale $\Leftrightarrow$ p est autoadjoint

preuve :

6.5 Positivité

6.5.1 Définitions pour un endomorphisme

Définitions. *Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E,<,>)$.*
Alors on dit que :

f est un endomorphisme **autoadjoint positif** *si et seulement si* $\begin{cases} f \text{ est autoadjoint} \\ \forall x \in E\ ,\ < f(x), x > \geq 0 \end{cases}$

f est un endomorphisme **autoadjoint défini positif** *si et seulement si* $\begin{cases} f \text{ est autoadjoint} \\ \forall x \in E\ ,\ x \neq 0_E \Rightarrow < f(x), x > > 0 \end{cases}$

Remarque. *Notations : on note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs*
et on note $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

6.5.2 Caractérisation spectrale

Théorème . *Soit f un endomorphisme autoadjoint de $(E, <, >)$. Alors :*

$$f \in S^+(E) \Leftrightarrow sp(f) \subset [0; +\infty[\text{ et } f \in S^{++}(E) \Leftrightarrow sp(f) \subset]0; +\infty[$$

Remarque. *Ne pas oublier que f doit être autoadjoint avant d'appliquer ces équivalences.*

preuve :

6.5.3 Pour les matrices

Définitions. *Une matrice symétrique réelle A est dite* **positive** *si et seulement si $sp(A) \subset [0; +\infty[$.*
Une matrice symétrique réelle A est dite **définie positive** *si et seulement si $sp(A) \subset]0; +\infty[$*

Remarques. *Les matrices symétrique réelles positives représentent les endomorphismes autoadjoints positifs dans une base orthonormée.*
Les matrices symétrique réelles définies positives représentent les endomorphismes autoadjoints définis positifs dans une base orthonormée.
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles définies positives.

Sommaire