

PSI* 2025-2026 : Plan du cours et questions de cours possibles

PLAN DU COURS

Chapitre 1. Révisions et compléments d'analyse

Chapitre 2. Séries numériques

Chapitre 3. Espaces vectoriels et applications linéaires

Chapitre 4. Calculs matriciels, algèbre linéaire et matrices

Chapitre 5. Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Chapitre 6. Intégrales généralisées sur un intervalle

Chapitre 7. Espaces préhilbertiens et espaces euclidiens

Chapitre 8. Espaces vectoriels normés

Chapitre 9. Topologie d'un espace vectoriel normé : application

Chapitre 10. Suites de fonctions

Chapitre 11. Séries de fonctions

Chapitre 12. Séries entières

Chapitre 13. Eléments propres

Chapitre 14. Réduction

Chapitre 15. Endomorphismes particuliers d'un espace eucliden ; matrices symétriques réelles

QUESTIONS DE COURS, Chapitre 1 : Révisions et compléments d'analyse

1. Définition d'un point adhérent dans \mathbb{R}
2. Continuité en un point et continuité globale pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
3. Dérivabilité en un point et dérivabilité globale pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
4. Dérivée d'une fonction réciproque.
5. Théorème de la limite de la dérivée.
6. Comparaison locale de fonctions : équivalent, négligeable, dominée.
7. Tous les DL en 0 usuels.
8. Formule de Taylor-Young.
9. Théorème des valeurs intermédiaires.
10. Théorème des bornes atteintes.
11. Théorème des accroissements finis.
12. Définition de la monotonie (et lien avec la dérivée).
13. Définition d'une fonction paire ou impaire. Interprétation graphique.
14. Tangente en un point pour la représentation graphique d'une fonction.
15. Définition d'une fonction convexe sur un intervalle. Propriétés.
16. Définition d'une primitive. Propriétés.
17. Primitives usuelles.
18. Changement de variable.
19. Intégration par parties.
20. Somme de Riemann.
21. Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment ou sur un intervalle.
22. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.
23. Linéarité, positivité, croissante, inégalité de la moyenne, relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux.
24. Théorème de l'intégrale nulle.

QUESTIONS DE COURS, Chapitre 2 : Séries numériques

25. Définition d'une série, d'une série convergente, d'une série divergente, d'une série grossièrement divergente, de la somme et du reste.
26. Théorème suite-série : $\sum(u_{n+1} - u_n)$ convergente $\Leftrightarrow (u_n)$ convergente.
27. Combinaison linéaire de séries.
28. Séries géométriques : définition, convergence et somme.
29. Séries de Riemann.
30. Règle de comparaison pour les séries.
31. Règle de l'équivalent pour les séries.
32. Absolue convergence : définition et théorème.
33. Règle de D'Alembert pour les séries numériques.
34. Comparaison avec négligeable ou dominée.
35. Série alternée : définition et théorème spécial.
36. Produit de Cauchy : définition et théorème.
37. Formule de Stirling.

QUESTIONS DE COURS, Chapitre 3 : Espaces vectoriels et applications linéaires

38. *Définition d'une loi interne, d'une loi externe.*
39. *Définition d'un espace vectoriel.*
40. *Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.*
41. *Définition d'un application linéaire et vocabulaire associé (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme)*
42. *Définition du noyau, lien avec l'injectivité.*
43. *Définition du l'image, lien avec la surjectivité.*
44. *Famille finie de vecteurs libre, liée, génératrice. Base.*
45. *Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.*
46. *Théorème de la base incomplète.*
47. *Formule de Grasmann.*
48. *Rang d'une famille de vecteurs.*
49. *Théorème du rang. Cas particulier avec les endomorphismes.*
50. *Définition d'une forme linéaire.*
51. *Hyperplan : définition, caractérisations, équation dans une base.*

QUESTIONS DE COURS, Chapitre 4 : Espaces vectoriels et applications linéaires

52. *Définition du produit matriciel.*
53. *Définition de la transposée d'une matrice. Propriétés.*
54. *Définition d'une matrice symétrique, d'une matrice antisymétrique.*
55. *Définition du rang d'une matrice.*
56. *Définition du déterminant d'une matrice.*
57. *Propriétés du déterminant.*
58. *Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.*
59. *Déterminant de Vandermonde : définition et expression.*
60. *Matrice d'un vecteur relativement à une base.*
61. *Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases, d'un endomorphisme relativement à une base.*
62. *Matrice d'une composée.*
63. *Formule de changement de bases pour un vecteur.*
64. *Formule de changement de bases pour une application linéaire.*
65. *Formule de changement de bases pour un endomorphisme.*
66. *Déterminant d'une famille de $\dim(E)$ vecteurs relativement à une base B de E (dimension finie). Propriétés.*
67. *Déterminant d'un endomorphisme (dimension finie). Propriétés.*

QUESTION DE COURS : Chapitre 5 : Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

68. *Définition de l'espace vectoriel produit d'un nombre fini d'espace vectoriel.*
69. *Dimension de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ quand les E_i sont de dimensions finies.*
70. *Somme de p sous-espaces vectoriels.*
71. *Somme directe de p sous-espaces vectoriels : définition et caractérisation.*
72. *Cas particulier de la somme de 2 sous espaces vectoriels en somme directe. Caractérisations.*
73. *Base adaptée à une somme directe, partition d'une base.*
74. *Théorème sur la dimension d'une somme de sous espace vectoriels de dimensions finies.*
75. *Définition des matrices par blocs : opérations élémentaires ...*
76. *Définition d'un projecteur et théorème associé.*
77. *Définition d'une symétrie et théorème associé.*
78. *Définition d'un sous espace vectoriel stable et interprétation matricielle.*
79. *Définition de la trace d'une matrice. Propriétés.*
80. *Trace d'un endomorphisme. Propriétés.*
81. *Polynômes d'endomorphisme et de matrice. Définition et propriétés.*
82. *Polynômes annulateurs d'une matrice ou d'un endomorphisme : définitions.*
83. *Polynômes interpolateur de Lagrange : définition, propriétés et lien avec Vandermonde*

QUESTIONS DE COURS, Chapitre 6 : Intégrales généralisées sur un intervalle

84. Définition d'une intégrale convergente sur un intervalle.
85. Propriétés : linéarité, positivité, croissance, Chasles, partie réelle et imaginaire
86. Intégrales de références : $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ et intégrales de Riemann
87. Règle de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives.
88. Théorème de comparaison série-intégrale
89. Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle.
90. Théorème de l'absolue convergence.
91. Inégalité de la moyenne
92. Théorème de l'intégrable généralisée nulle.
93. Inégalité triangulaire.
94. Espace $L^1(I, K)$
95. Intégrabilité et équivalent.
96. Intégrabilité et négligeable ou dominée.
97. Théorème de comparaison série-intégrale.
98. Changement de variable dans les intégrales généralisées.
99. Intégration par parties dans les intégrales généralisées.

QUESTIONS DE COURS,
Chapitre 7 : Espaces préhilbertiens réels ; espaces euclidiens

100. *Définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien, d'un espace euclidien*
101. *Les produits scalaires usuels : produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , sur $M_n(\mathbb{R})$ (expression avec la trace), sur $C^0([a; b])$*
102. *Norme euclidienne. Propriétés.*
103. *Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.*
104. *Inégalité triangulaire, cas d'égalité.*
105. *Identité du parallélogramme*
106. *Identités de polarisation.*
107. *Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux. Famille orthogonale, orthonormale.*
108. *Théorème sur la liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls.*
109. *Théorème de Pythagore.*
110. *Orthogonal d'une partie. Propriétés.*
111. *Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.*
112. *Existence de bases orthonormées pour des sous-espaces vectoriels de dimensions finies.*
113. *Calcul du produit scalaire dans une base orthonormée d'un espace euclidien.*
114. *Théorème de projection orthogonale.*
115. *Représentation d'une forme linéaire à l'aide du produit scalaire.*
116. *Caractérisation d'un hyperplan par un vecteur normal.*
117. *Projection sur une droite et distance à un hyperplan.*

Chapitre 8 : QUESTIONS DE COURS, Espaces vectoriels normés

118. *Définition d'une norme. Propriétés de la norme (dont la deuxième inégalité triangulaire).*
119. *Normes usuelles sur K^n : norme 1, norme 2, norme infinie. Application à $M_n(K)$*
120. *Extensions des normes usuelles de K^n à un K espace vectoriel de dimension finie.*
121. *Norme infinie sur $B(I, K)$ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans K .*
122. *Définition et propriétés de la distance associée à une norme.*
123. *Définitions des boules ouvertes, fermées, et des sphères (de centre a et de rayon r).*
124. *Définition de deux normes équivalentes.*
125. *Équivalence de normes en dimension finie.*

QUESTIONS DE COURS chapitre 9 : Topologie d'un espace vectoriel normé : applications

126. Définition d'un point intérieur.
127. Définition d'un ouvert. Propriétés avec intersection et union.
128. Définition d'un fermé. Propriétés avec intersection et union.
129. Parties bornées, parties convexe.
130. Suite d'un espace vectoriel normé, convergence, divergence, suites bornées.
131. Propriétés et opérations sur les suites convergentes.
132. Suites extraites.
133. Définition d'un point adhérent, de l'adhérence d'une partie.
134. Caractérisation séquentielle d'un point adhérent, lien avec les fermés.
135. Définition d'une partie dense.
136. Convergence par coordonnées en dimension finie.
137. Définition de la limite d'une fonction en un point adhérent.
138. Caractérisation séquentielle de la limite.
139. Opérations sur les limites.
140. Continuité en un point, continuité global, prolongement par continuité.
141. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
142. Opérations sur les fonctions continues.
143. Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.
144. Fonction Lipschitzienne : définition et propriétés.
145. Continuité par coordonnées dans le cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie.
146. Théorèmes des bornes atteintes.
147. Continuité des applications linéaires, multilinéaires, polynomiales.

QUESTIONS DE COURS : Chapitre 10 : Suites de fonctions

148. *Convergence SIMPLE d'une suite de fonctions à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} sur I un intervalle de \mathbb{R} .*
149. *Convergence UNIFORME d'une suite de fonctions à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} sur I un intervalle de \mathbb{R} .*
150. *Lien entre la convergence uniforme et la norme infinie.*
151. *Lien entre convergence uniforme et convergence simple.*
152. *Continuité et convergence uniforme (en un point, sur I , sur tout segment inclu dans I).*
153. *Intégration sur un segment et continuité uniforme.*
154. *Dérivation et continuité uniforme : classe C^1 .*
155. *Dérivation et continuité uniforme : classe C^k .*

QUESTIONS DE COURS : Chapitre 11 : Séries de fonctions

156. Convergence SIMPLE, convergence UNIFORME et convergence NORMALE d'une série de fonctions d'un intervalle de \mathbb{R} dans $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
157. Lien entre ces modes de convergence.
158. Utilisation du reste.
159. Continuité d'une série de fonctions.
160. Intégration terme à terme sur un segment.
161. Déivation terme à terme d'une séries de fonctions. (classe C^1).
162. Généralisation : classe C^k .
163. Théorème de la double limite pour les séries de fonctions.

QUESTIONS DE COURS : Chapitre 12 : Séries entières

164. Définition d'une série entière et de sa somme.
165. Définitions du rayon de convergence d'une série entière.
166. Règles de comparaisons et règle de l'équivalent pour les séries entières.
167. Utilisation de la règle de D'Alembert pour calculer un rayon de convergence.
168. Somme de deux séries entières et rayon de convergence.
169. Produit de deux séries entières et rayon de convergence.
170. Convergence normale d'une série entière.
171. Continuité d'une série entière.
172. Dérivations successives d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
173. Primitivation d'une série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
174. Fonctions développables en série entière sur $[-r, r]$
175. Unicité du DSE et lien avec Taylor.
176. DSE₀ usuels.
177. Continuité d'une série entière d'une variable complexe.
178. Exponentielle complexe. Définition et propriétés.

QUESTIONS DE COURS : Chapitre 13 : Eléments propres

179. Caractérisation d'une droite stable par un endomorphisme.
180. Définitions des éléments propres d'un endomorphisme d'un K espace vectoriel ou d'une matrice de $M_n(K)$.
181. Caractérisations des valeurs propres.
182. Lien valeur propre nulle et noyau.
183. Somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.
184. Théorème : inclusion entre ensemble des racines d'un polynôme annulateur et spectre.
185. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie : définition, termes de degré n , $n-1$ et 0.
186. Spectre et polynôme caractéristique.
187. Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Inégalités sur la dimension des sous espaces propres.
188. Théorème de Hamilton-Cayley.

QUESTIONS DE COURS : Chapitre 14 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

189. *Endomorphisme ou matrice diagonalisable, (resp .trigonalisable) : définition.*
190. *Condition nécessaires et suffisantes de diagonasibilité.*
191. *Condition suffisantes de diagonasibilité.*
192. *Diagonalisation et polynôme annulateur.*
193. *Endomorphisme induit et diagonalisation.*
194. *Méthode de diagonalisation.*
195. *Condition nécessaires et suffisantes de trigonasibilité.*

Chapitre 15 : Endomorphismes d'un espace euclidien ; matrices symétriques réelles

- 196. Définitions et différentes caractérisations d'une isométrie vectorielle.
- 197. Propriété (type groupe) de $O(E)$
- 198. Stabilité de l'orthogonale d'un sous espace vectoriel stable par une isométrie vectorielle.
- 199. Définitions et différentes caractérisations d'une matrice orthogonale.
- 200. Groupe orthogonale $O_n(\mathbb{R})$, groupe spécial orthogonale $SO_n(\mathbb{R})$, propriétés.
- 201. Matrices de changements de bases orthonormées.
- 202. Orientation d'un espace euclidien.
- 203. Produit mixte : définition et propriétés.
- 204. Produit vectoriel : définition et propriétés.
- 205. Définition et caractérisation des rotations en dimension 2.
- 206. Définition et caractérisation des rotations en dimension 3.
- 207. Définition d'un endomorphisme autoadjoint et matrice dans une base orthonormée.
- 208. Théorème spectral : version endomorphisme et version matricielle
- 209. Propriété sur les projecteurs autoadjoints.