

---

PLAN DU COURS
---------------

**Chapitre 1.** *Révisions et compléments d'analyse*

**Chapitre 2.** *Séries numériques*

**Chapitre 3.** *Espaces vectoriels et applications linéaires*

**Chapitre 4.** *Calculs matriciels, algèbre linéaire et matrices*

**Chapitre 5.** *Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices*

**Chapitre 6.** *Intégrales généralisées sur un intervalle*

**Chapitre 7.** *Espaces préhilbertiens et espaces euclidiens*

**Chapitre 8.** *Espaces vectoriels normés*

**Chapitre 9.** *Topologie d'un espace vectoriel normé : application*

**Chapitre 10.** *Suites de fonctions*

**Chapitre 11.** *Séries de fonctions*

**Chapitre 12.** *Séries entières*

**Chapitre 13.** *Eléments propres*

**Chapitre 14.** *Réduction*

**Chapitre 15.** *Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien ; matrices symétriques réelles*

1. *Définition d'un point adhérent dans  $\mathbb{R}$*
2. *Continuité en un point et continuité globale pour une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .*
3. *Dérivabilité en un point et dérivabilité globale pour une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .*
4. *Dérivée d'une fonction réciproque.*
5. *Théorème de la limite de la dérivée.*
6. *Comparaison locale de fonctions : équivalent, négligeable, dominée.*
7. *Tous les DL en 0 usuels.*
8. *Formule de Taylor-Young.*
9. *Théorème des valeurs intermédiaires.*
10. *Théorème des bornes atteintes.*
11. *Théorème des accroissements finis.*
12. *Définition de la monotonie (et lien avec la dérivée).*
13. *Définition d'une fonction paire ou impaire. Interprétation graphique.*
14. *Tangente en un point pour la représentation graphique d'une fonction.*
15. *Définition d'une fonction convexe sur un intervalle. Propriétés.*
16. *Définition d'une primitive. Propriétés.*
17. *Primitives usuelles.*
18. *Changement de variable.*
19. *Intégration par parties.*
20. *Somme de Riemann.*
21. *Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment ou sur un intervalle.*
22. *Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.*
23. *Linéarité, positivité, croissante, inégalité de la moyenne, relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux.*
24. *Théorème de l'intégrale nulle.*

## QUESTIONS DE COURS, Chapitre 2 : Séries numériques

25. *Définition d'une série, d'une série convergente, d'une série divergente, d'une série grossièrement divergente, de la somme et du reste.*
26. *Théorème suite-série :  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  convergente  $\Leftrightarrow (u_n)$  convergente.*
27. *Combinaison linéaire de séries.*
28. *Séries géométriques : définition, convergence et somme.*
29. *Séries de Riemann.*
30. *Règle de comparaison pour les séries.*
31. *Règle de l'équivalent pour les séries.*
32. *Absolue convergence : définition et théorème.*
33. *Règle de D'Alembert pour les séries numériques.*
34. *Comparaison avec négligeable ou dominée.*
35. *Série alternée : définition et théorème spécial.*
36. *Produit de Cauchy : définition et théorème.*
37. *Formule de Stirling.*

## QUESTIONS DE COURS, Chapitre 3 : Espaces vectoriels et applications linéaires

- 38. *Définition d'une loi interne, d'une loi externe.*
- 39. *Définition d'un espace vectoriel.*
- 40. *Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.*
- 41. *Définition d'une application linéaire et vocabulaire associé (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme)*
- 42. *Définition du noyau, lien avec l'injectivité.*
- 43. *Définition de l'image, lien avec la surjectivité.*
- 44. *Famille finie de vecteurs libre, liée, génératrice. Base.*
- 45. *Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.*
- 46. *Théorème de la base incomplète.*
- 47. *Formule de Grasmann.*
- 48. *Rang d'une famille de vecteurs.*
- 49. *Théorème du rang. Cas particulier avec les endomorphismes.*
- 50. *Définition d'une forme linéaire.*
- 51. *Hyperplan : définition, caractérisations, équation dans une base.*

## QUESTIONS DE COURS, Chapitre 4 : Espaces vectoriels et applications linéaires

- 52. *Définition du produit matriciel.*
- 53. *Définition de la transposée d'une matrice. Propriétés.*
- 54. *Définition d'une matrice symétrique, d'une matrice antisymétrique.*
- 55. *Définition du rang d'une matrice.*
- 56. *Définition du déterminant d'une matrice.*
- 57. *Propriétés du déterminant.*
- 58. *Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.*
- 59. *Déterminant de Vandermonde : définition et expression.*
- 60. *Matrice d'un vecteur relativement à une base.*
- 61. *Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases, d'un endomorphisme relativement à une base.*
- 62. *Matrice d'une composée.*
- 63. *Formule de changement de bases pour un vecteur.*
- 64. *Formule de changement de bases pour une application linéaire.*
- 65. *Formule de changement de bases pour un endomorphisme.*
- 66. *Déterminant d'une famille de  $\dim(E)$  vecteurs relativement à une base  $B$  de  $E$  (dimension finie). Propriétés.*
- 67. *Déterminant d'un endomorphisme (dimension finie). Propriétés.*

## QUESTION DE COURS : Chapitre 5 : Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

- 68. Définition de l'espace vectoriel produit d'un nombre fini d'espace vectoriel.
- 69. Dimension de  $E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$  quand les  $E_i$  sont de dimensions finies.
- 70. Somme de  $p$  sous-espaces vectoriels.
- 71. Somme directe de  $p$  sous-espaces vectoriels : définition et caractérisation.
- 72. Cas particulier de la somme de 2 sous espaces vectoriels en somme directe. Caractérisations.
- 73. Base adaptée à une somme directe, partition d'une base.
- 74. Théorème sur la dimension d'une somme de sous espace vectoriels de dimensions finies.
- 75. Définition des matrices par blocs : opérations élémentaires ...
- 76. Définition d'un projecteur et théorème associé.
- 77. Définition d'une symétrie et théorème associé.
- 78. Définition d'un sous espace vectoriel stable et interprétation matricielle.
- 79. Définition de la trace d'une matrice. Propriétés.
- 80. Trace d'un endomorphisme. Propriétés.
- 81. Polynômes d'endomorphisme et de matrice. Définition et propriétés.
- 82. Polynômes annulateurs d'une matrice ou d'un endomorphisme : définitions.
- 83. Polynômes interpolateur de Lagrange : définition, propriétés et lien avec Vandermonde

<b>QUESTIONS DE COURS, Chapitre 6 : Intégrales généralisées sur un intervalle</b>
---

- 84. *Définition d'une intégrale convergente sur un intervalle.*
- 85. *Propriétés : linéarité, positivité, croissance, Chasles, partie réelle et imaginaire*
- 86. *Intégrales de références :  $\int_0^1 \ln(t)dt$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$  et intégrales de Riemann*
- 87. *Règle de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives.*
- 88. *Théorème de comparaison série-intégrale*
- 89. *Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle.*
- 90. *Théorème de l'absolue convergence.*
- 91. *Inégalité de la moyenne*
- 92. *Théorème de l'intégrable généralisée nulle.*
- 93. *Inégalité triangulaire.*
- 94. *Espace  $L^1(I, K)$*
- 95. *Intégrabilité et équivalent.*
- 96. *Intégrabilité et négligeable ou dominée.*
- 97. *Théorème de comparaison série-intégrale.*
- 98. *Changement de variable dans les intégrales généralisées.*
- 99. *Intégration par parties dans les intégrales généralisées.*

**QUESTIONS DE COURS,**  
**Chapitre 7 : Espaces préhilbertiens réels ; espaces euclidiens**

- 100. Définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien, d'un espace euclidien
- 101. Les produits scalaires usuels : produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , sur  $M_n(\mathbb{R})$  (expression avec la trace), sur  $C^0([a; b])$
- 102. Norme euclidienne. Propriétés.
- 103. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.
- 104. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
- 105. Identité du parallélogramme
- 106. Identités de polarisation.
- 107. Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux. Famille orthogonale, orthonormale.
- 108. Théorème sur la liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls.
- 109. Théorème de Pythagore.
- 110. Orthogonal d'une partie. Propriétés.
- 111. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.
- 112. Existence de bases orthonormées pour des sous-espaces vectoriels de dimensions finies.
- 113. Calcul du produit scalaire dans une base orthonormée d'un espace euclidien.
- 114. Théorème de projection orthogonale.
- 115. Représentation d'une forme linéaire à l'aide du produit scalaire.
- 116. Caractérisation d'un hyperplan par un vecteur normal.
- 117. Projection sur une droite et distance à un hyperplan.



## Chapitre 8 : QUESTIONS DE COURS, Espaces vectoriels normés

- 118. *Définition d'une norme. Propriétés de la norme (dont la deuxième inégalité triangulaire).*
- 119. *Normes usuelles sur  $K^n$  : norme 1, norme 2, norme infinie. Application à  $M_n(K)$*
- 120. *Extensions des normes usuelles de  $K^n$  à un  $K$  espace vectoriel de dimension finie.*
- 121. *Norme infinie sur  $B(I, K)$  sur l'espace vectoriel des fonctions bornées de  $I$  dans  $K$ .*
- 122. *Définition et propriétés de la distance associée à une norme.*
- 123. *Définitions des boules ouvertes, fermées, et des sphères (de centre  $a$  et de rayon  $r$ ).*
- 124. *Définition de deux normes équivalentes.*
- 125. *Equivalence de normes en dimension finie.*

## QUESTIONS DE COURS chapitre 9 : Topologie d'un espace vectoriel normé : applications

- 126. *Définition d'un point intérieur.*
- 127. *Définition d'un ouvert. Propriétés avec intersection et union.*
- 128. *Définition d'un fermé. Propriétés avec intersection et union.*
- 129. *Parties bornées, parties convexe.*
- 130. *Suite d'un espace vectoriel normé, convergence, divergence, suites bornées.*
- 131. *Propriétés et opérations sur les suites convergentes.*
- 132. *Suites extraites.*
- 133. *Définition d'un point adhérent, de l'adhérence d'une partie.*
- 134. *Caractérisation séquentielle d'un point adhérent, lien avec les fermés.*
- 135. *Définition d'une partie dense.*
- 136. *Convergence par coordonnées en dimension finie.*
- 137. *Définition de la limite d'une fonction en un point adhérent.*
- 138. *Caractérisation séquentielle de la limite.*
- 139. *Opérations sur les limites.*
- 140. *Continuité en un point, continuité global, prolongement par continuité.*
- 141. *Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.*
- 142. *Opérations sur les fonctions continues.*
- 143. *Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.*
- 144. *Fonction Lipschitzienne : définition et propriétés.*
- 145. *Continuité par coordonnées dans le cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie.*
- 146. *Théorèmes des bornes atteintes.*
- 147. *Continuité des applications linéaires, multilinéaires, polynomiales.*

## QUESTIONS DE COURS : Chapitre 10 : Suites de fonctions

- 148. Convergence *SIMPLE* d'une suite de fonctions à valeurs dans  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- 149. Convergence *UNIFORME* d'une suite de fonctions à valeurs dans  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- 150. Lien entre la convergence uniforme et la norme infinie.
- 151. Lien entre convergence uniforme et convergence simple.
- 152. Continuité et convergence uniforme (en un point, sur  $I$ , sur tout segment inclu dans  $I$ ).
- 153. Intégration sur un segment et continuité uniforme.
- 154. Dérivation et continuité uniforme : classe  $C^1$ .
- 155. Dérivation et continuité uniforme : classe  $C^k$ .

## QUESTIONS DE COURS : Chapitre 11 : Séries de fonctions

- 156. Convergence *SIMPLE*, convergence *UNIFORME* et convergence *NORMALE* d'une série de fonctions d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- 157. Lien entre ces modes de convergence.
- 158. Utilisation du reste.
- 159. Continuité d'une série de fonctions.
- 160. Intégration terme à terme sur un segment.
- 161. Dérivation terme à terme d'une séries de fonctions. (classe  $C^1$ ).
- 162. Généralisation : classe  $C^k$ .
- 163. Théorème de la double limite pour les séries de fonctions.

## QUESTIONS DE COURS : Chapitre 12 : Séries entières

- 164. *Définition d'une série entière et de sa somme.*
- 165. *Définitions du rayon de convergence d'une série entière.*
- 166. *Règles de comparaisons et règle de l'équivalent pour les séries entières.*
- 167. *Utilisation de la règle de D'Alembert pour calculer un rayon de convergence.*
- 168. *Somme de deux séries entières et rayon de convergence.*
- 169. *Produit de deux séries entières et rayon de convergence.*
- 170. *Convergence normale d'une série entière.*
- 171. *Continuité d'une série entière.*
- 172. *Dérivations successives d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.*
- 173. *Primitivation d'une série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.*
- 174. *Fonctions développables en série entière sur  $[-r, r]$*
- 175. *Unicité du DSE et lien avec Taylor.*
- 176. *DSE<sub>0</sub> usuels.*
- 177. *Continuité d'une série entière d'une variable complexe.*
- 178. *Exponentielle complexe. Définition et propriétés.*

## QUESTIONS DE COURS : Chapitre 13 : Eléments propres

- 179. *Caractérisation d'une droite stable par un endomorphisme.*
- 180. *Définitions des éléments propres d'un endomorphisme d'un  $K$  espace vectoriel ou d'une matrice de  $M_n(K)$ .*
- 181. *Caractérisations des valeurs propres.*
- 182. *Lien valeur propre nulle et noyau.*
- 183. *Somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.*
- 184. *Théorème : inclusion entre ensemble des racines d'un polynôme annulateur et spectre.*
- 185. *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie : définition, termes de degré  $n$ ,  $n-1$  et  $0$ .*
- 186. *Spectre et polynôme caractéristique.*
- 187. *Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Inégalités sur la dimension des sous espaces propres.*
- 188. *Théorème de Hamilton-Cayley.*

## QUESTIONS DE COURS : Chapitre 14 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

189. *Endomorphisme ou matrice diagonalisable, (resp .trigonalisable) : définition.*

190. *Condition nécessaires et suffisantes de diagonasibilité.*

191. *Condition suffisantes de diagonasibilité.*

192. *Diagonalisation et polynôme annulateur.*

193. *Endomorphisme induit et diagonalisation.*

194. *Méthode de diagonalisation.*

195. *Condition nécessaires et suffisantes de trigonasibilité.*

## Chapitre 15 : Endomorphismes d'un espace euclidien ; matrices symétriques réelles

- 196. Définitions et différentes caractérisations d'une isométrie vectorielle.
- 197. Propriété (type groupe) de  $O(E)$
- 198. Stabilité de l'orthogonale d'un sous espace vectoriel stable par une isométrie vectorielle.
- 199. Définitions et différentes caractérisations d'une matrice orthogonale.
- 200. Groupe orthogonale  $O_n(\mathbb{R})$ , groupe spécial orthogonale  $SO_n(\mathbb{R})$ , propriétés.
- 201. Matrices de changements de bases orthonormées.
- 202. Orientation d'un espace euclidien.
- 203. Produit mixte : définition et propriétés.
- 204. Produit vectoriel : définition et propriétés.
- 205. Définition et caractérisation des rotations en dimension 2.
- 206. Définition et caractérisation des rotations en dimension 3.
- 207. Définition d'un endomorphisme autoadjoint et matrice dans une base orthonormée.
- 208. Théorème spectral : version endomorphisme et version matricielle
- 209. Propriété sur les projecteurs autoadjoints.