

# PSI\* Mathématiques DS n°5

## Type centrale

19/01/26

Ce sujet comporte quatre parties, qui peuvent être traitées indépendamment :

- La partie I étudie deux façons d'approcher le réel  $\sqrt{2}$ .
- La partie II généralise la méthode de Héron d'Alexandrie étudiée en sous-partie I.B au cadre des matrices symétriques positives.
- La partie III traite le cas général de la méthode de Newton numérique réelle.
- La partie IV s'inspire de la méthode de Newton abordée en partie III pour établir l'existence de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford, par une approche algorithmique et en donne une application à la détermination de la racine carrée de certaines matrices.

### Notations

Dans tout le sujet,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $q$  est un entier naturel non nul.

On note  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $q$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ; on note  $I_q$  la matrice identité dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et  $P^T$  la transposée d'une matrice  $P$ . On note  $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques appartenant à  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ . On note  $O(q)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices  $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  vérifiant  $P^T P = I_q$ .

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et pour tous  $1 \leq i, j \leq q$ , on note  $[M]_{i,j}$  le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $M$ .

Pour  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{K}$ , on note  $\text{diag}(a_1, \dots, a_q)$  la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  telle que, pour tous  $1 \leq i, j \leq q$ :

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On munit l'ensemble  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  d'une norme  $\|\cdot\|$ . On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  ne dépend pas du choix de la norme  $\|\cdot\|$ . On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants :

pour toute suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ,

- la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $M$  si et seulement si, pour tous  $1 \leq i, j \leq q$ , la suite  $([M_n]_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[M]_{i,j}$ ;
- si  $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et si la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $M$ , alors les suites  $(AM_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n A)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $AM$  et  $MA$ .

## I Quelques approximations de $\sqrt{2}$ .

### I.A – Via un développement en série entière.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On pose  $a_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k).$$

**Q 1.** Montrer que le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  vaut :

$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Q 2.** Donner, sans justification supplémentaire, l'expression de la fonction somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  sur  $]-R, R[$ .

**Q 3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$ . Montrer que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n.$$

**Q 4.** Déterminer un équivalent simple de la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En déduire la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n$ .

**Q 5.** Montrer que la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n x^n$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  et en déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$ .

**Q 6.** Montrer que

$$\sqrt{2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k + \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n^{3/2}} \right).$$

#### I.B – Via la méthode de Héron d'Alexandrie.

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . On définit la suite  $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left( c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right). \end{cases}$$

**Q 7.** Montrer, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n(a)$  est bien défini et que  $c_n(a) > 0$ .

**Q 8.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donner une expression de  $c_{n+1}(a)^2 - a$  faisant intervenir  $(c_n(a)^2 - a)^2$ . En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $c_n(a) \geq \sqrt{a}$ .

**Q 9.** Montrer que  $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{a}$ .

**Q 10.** Calculer  $c_1(2)$ . À l'aide de la question Q 8, montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{2} = c_n(2) + \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right).$$

#### I.C – Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$ : vitesses de convergence.

**Q 11.** Parmi les deux suites  $\left( \frac{1}{n^{3/2}} \right)$  et  $\left( \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$ , déterminer celle qui converge le plus vite vers zéro.

Dans la question suivante, on s'interdit d'utiliser une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  stockée dans Python. En particulier, on s'interdit l'utilisation de `2 ** (1/2)`, `math.sqrt(2)` ou `numpy.sqrt(2)`.

**Q 12.** Écrire une suite d'instructions en Python permettant, grâce à la méthode de la question Q 10, d'obtenir une approximation de  $\sqrt{2}$  avec 10 décimales correctes.

## II Racine carrée d'une matrice symétrique positive.

On note  $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire des matrices  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  vérifiant  $X^T M X \geq 0$  pour toute matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ .

Dans toute cette partie, étant donnée une matrice  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ , on appelle racine carrée de  $M$  toute matrice  $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = M$ .

#### II.A – Racines carrées de la matrice $I_2$ .

**Q 13.** Rappeler sans démonstration la description des matrices de  $O(2)$ .

On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Q 14.** Déterminer les racines carrées de  $I_2$  appartenant à  $O(2)$ . Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de  $I_2$  ?

#### II.B – Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive.

**Q 15.** Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.

**Q 16.** Soit  $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ . Déterminer une matrice  $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = M$ .

**Q 17.** Montrer que  $B$  est la seule racine carrée de  $M$  appartenant à  $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ .

On note alors  $\sqrt{M}$  l'unique racine carrée symétrique positive de  $M$ .

## II.C – Une méthode de Héron d’Alexandrie matricielle.

Soit  $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  les valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité. On rappelle que, d’après le théorème spectral, il existe une matrice  $P \in \mathrm{O}(q)$  telle que

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^T.$$

On rappelle de plus que, pour tout réel  $a \geq 0$ , la suite  $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  définie en sous-partie I.B, est à valeurs strictement positives et converge vers  $\sqrt{a}$ . On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2} (M_n + M_n^{-1}). \end{cases}$$

**Q 18.** Montrer, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n$  est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T.$$

**Q 19.** En déduire que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{M}$ .

## III Méthode de Newton numérique.

Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  telle que  $f'$  ne s’annule pas sur  $I$ .

### III.A – Convergence de la méthode de Newton.

**Q 20.** Que dire du nombre du nombre de points d’annulation de  $f$  sur  $I$  ?

On suppose qu’il existe  $c \in I$  tel que  $f(c) = 0$ . Pour tout  $r > 0$ , on pose  $J_r = [c - r, c + r]$ .

Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que

$$\begin{cases} c_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}. \end{cases}$$

L’objectif de cette sous-partie III.A est de montrer qu’il existe  $r > 0$  tel que  $J_r \subset I$  et tel que, si  $c_0 \in J_r$ , alors  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $c$ .

**Q 21.** Soit  $r > 0$  tel que  $J_r \subset I$ . Justifier que  $s_r = \sup_{J_r} |f''|$  et  $i_r = \inf_{J_r} |f'|$  sont bien définis et que  $i_r > 0$ .

On note  $K_r = \frac{s_r}{2i_r}$ .

**Q 22.** Justifier qu’il existe  $r > 0$  tel que  $0 \leq rK_r < 1$ .

Dans la suite de cette sous-partie III.A, on fixe  $r > 0$  tel que  $rK_r < 1$ .

**Q 23.** On suppose que  $n \in \mathbb{N}$  et  $c_n \in J_r$ . À l’aide de l’inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r |c_n - c|^2,$$

puis en déduire que  $c_{n+1} \in J_r$ .

**Q 24.** Montrer que, si  $c_0 \in J_r$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|c_n - c| \leq \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$  et conclure.

### III.B – Une implémentation en Python.

**Q 25.** On désigne dans cette question par `df` la fonction Python représentant  $f'$ . Écrire une fonction Python `newton(c0, f, df)` prenant en arguments le réel  $c_0$  et les fonctions  $f$  et  $f'$  et renvoyant, si la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, une valeur approchée de  $c$  et la valeur `None` si  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

On pourra convenir ici que la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si on trouve un  $n \leq 50$  tel que  $|f(c_n)| < 10^{-10}$ , et qu’elle diverge sinon.

## IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée.

On dit qu’une matrice  $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$  est nilpotente s’il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^k = 0$ .

Dans toute cette partie IV, on fixe  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $M$  (avec  $s \in \mathbb{N}^*$ ). On définit alors

$$P(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i).$$

On note  $P'$  le polynôme dérivé de  $P$ .

Pour tout polynôme  $Q = \sum_{k=0}^d \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ , on note  $Q(M) = \sum_{k=0}^d \gamma_k M^k \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$  et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \{Q(M) \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :

- si  $A, B \in \mathbb{C}[M]$ , alors  $A$  et  $B$  commutent, et  $A + B$  et  $AB$  appartiennent à  $\mathbb{C}[M]$  ;
- si  $Q \in \mathbb{C}[X]$  et si  $A \in \mathbb{C}[M]$ , alors  $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$ .

#### **IV.A – Une méthode de Newton matricielle.**

**Q 26.** Montrer que, pour toute racine complexe  $\mu$  de  $P'$ , la matrice  $M - \mu I_q$  est inversible. En déduire que  $P'(M)$  est inversible.

**Q 27.** Montrer que le polynôme caractéristique  $\chi_M$  de  $M$  divise  $P^q$ . En déduire que  $P(M)$  est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \end{cases}$$

On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- $M_n$  est bien définie et appartient à  $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$  ;
- il existe  $B_n \in \mathbb{C}[M]$  telle que  $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$  ;
- la matrice  $P'(M_n)$  est inversible.

**Q 28.** Montrer que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.

**Q 29.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les matrices  $M$  et  $M_n$  commutent.

**Q 30.** On note  $A$  la limite de  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**Q 31.** On pose  $N = M - A$ . Justifier que  $A$  et  $N$  commutent et que  $N$  est nilpotente.

#### **IV.B – Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables**

**Q 32.** En utilisant le développement limité en 0 de la fonction  $x \mapsto \sqrt{1+x}$ , montrer qu'il existe un polynôme  $R_q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $X^q$  divise  $1 + X - R_q(X)^2$ .

**Q 33.** En déduire l'expression d'une racine carrée de  $I_q + N$  lorsque  $N$  est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que  $M$  est à coefficients réels et trigonalisable dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  et que le spectre de  $M$  est inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

On considère alors les matrices  $A$  et  $N$  introduites dans la sous-partie IV.A.

**Q 34.** Justifier que  $A$  et  $N$  sont à coefficients réels et que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ .

**Q 35.** Montrer que le spectre de  $A$  est inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Q 36.** Justifier que la méthode de Héron d'Alexandrie de la sous-partie II.C peut être appliquée à la matrice  $A$  afin d'obtenir une racine carrée  $A'$  de  $A$ . En déduire l'expression d'une racine carrée de  $M$ .

---

• • • FIN • • •

---