

Ce sujet comporte quatre parties, qui peuvent être traitées indépendamment :

- La partie I étudie deux façons d'approcher le réel $\sqrt{2}$.
- La partie II généralise la méthode de Héron d'Alexandrie étudiée en sous-partie I.B au cadre des matrices symétriques positives.
- La partie III traite le cas général de la méthode de Newton numérique réelle.
- La partie IV s'inspire de la méthode de Newton abordée en partie III pour établir l'existence de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford, par une approche algorithmique et en donne une application à la détermination de la racine carrée de certaines matrices.

Notations

Dans tout le sujet, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et q est un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille q à coefficients dans \mathbb{K} ; on note I_q la matrice identité dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et P^T la transposée d'une matrice P . On note $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On note $O(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^T P = I_q$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leq i, j \leq q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de M .

Pour $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{K}$, on note $\text{diag}(a_1, \dots, a_q)$ la matrice A de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $1 \leq i, j \leq q$:

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$.

On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants :

pour toute suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$,

- la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous $1 \leq i, j \leq q$, la suite $([M_n]_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$;
- si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M , alors les suites $(AM_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n A)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA .

I Quelques approximations de $\sqrt{2}$.

I.A – Via un développement en série entière.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k).$$

Q 1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ vaut :

$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 2. Donner, sans justification supplémentaire, l'expression de la fonction somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ sur $] -R, R[$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n.$$

- Q 4.** Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n$.
- Q 5.** Montrer que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n x^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$.
- Q 6.** Montrer que

$$\sqrt{2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

I.B – Via la méthode de Héron d’Alexandrie.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right). \end{cases}$$

- Q 7.** Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.
- Q 8.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2 - a)^2$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $c_n(a) \geq \sqrt{a}$.
- Q 9.** Montrer que $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \sqrt{a} .
- Q 10.** Calculer $c_1(2)$. À l’aide de la question Q 8, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{2} = c_n(2) + O\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right).$$

I.C – Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$: vitesses de convergence.

- Q 11.** Parmi les deux suites $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$, déterminer celle qui converge le plus vite vers zéro.

Dans la question suivante, on s’interdit d’utiliser une valeur approchée de $\sqrt{2}$ stockée dans Python. En particulier, on s’interdit l’utilisation de `2*(1/2)`, `math.sqrt(2)` ou `numpy.sqrt(2)`.

- Q 12.** Écrire une suite d’instructions en Python permettant, grâce à la méthode de la question Q 10, d’obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ avec 10 décimales correctes.

II Racine carrée d’une matrice symétrique positive.

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l’ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c’est-à-dire des matrices $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^T M X \geq 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

II.A – Racines carrées de la matrice I_2 .

- Q 13.** Rappeler sans démonstration la description des matrices de $O(2)$.
On décrira leurs coefficients en fonction d’un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.
- Q 14.** Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $O(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?

II.B – Existence et unicité d’une racine carrée symétrique positive.

- Q 15.** Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d’une matrice symétrique pour qu’elle soit positive.

- Q 16.** Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

- Q 17.** Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

On note alors \sqrt{M} l’unique racine carrée symétrique positive de M .

II.C – Une méthode de Héron d’Alexandrie matricielle.

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On rappelle que, d’après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O(q)$ telle que

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^T.$$

On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geq 0$, la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ définie en sous-partie I.B, est à valeurs strictement positives et converge vers \sqrt{a} . On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2} (M_n + M M_n^{-1}). \end{cases}$$

Q 18. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T.$$

Q 19. En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \sqrt{M} .

III Méthode de Newton numérique.

Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur I telle que f' ne s’annule pas sur I .

III.A – Convergence de la méthode de Newton.

Q 20. Que dire du nombre de points d’annulation de f sur I ?

On suppose qu’il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$. Pour tout $r > 0$, on pose $J_r = [c - r, c + r]$.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} c_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}. \end{cases}$$

L’objectif de cette sous-partie III.A est de montrer qu’il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset I$ et tel que, si $c_0 \in J_r$, alors $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c .

Q 21. Soit $r > 0$ tel que $J_r \subset I$. Justifier que $s_r = \sup_{J_r} |f''|$ et $i_r = \inf_{J_r} |f'|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

On note $K_r = \frac{s_r}{2i_r}$.

Q 22. Justifier qu’il existe $r > 0$ tel que $0 \leq rK_r < 1$.

Dans la suite de cette sous-partie III.A, on fixe $r > 0$ tel que $rK_r < 1$.

Q 23. On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et $c_n \in J_r$. À l’aide de l’inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r |c_n - c|^2,$$

puis en déduire que $c_{n+1} \in J_r$.

Q 24. Montrer que, si $c_0 \in J_r$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$ et conclure.

III.B – Une implémentation en Python.

Q 25. On désigne dans cette question par `df` la fonction Python représentant f' . Écrire une fonction Python `newton(c0, f, df)` prenant en arguments le réel c_0 et les fonctions f et f' et renvoyant, si la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, une valeur approchée de c et la valeur `None` si $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

On pourra convenir ici que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si on trouve un $n \leq 50$ tel que $|f(c_n)| < 10^{-10}$, et qu’elle diverge sinon.

IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée.

On dit qu’une matrice $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est nilpotente s’il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.

Dans toute cette partie IV, on fixe $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M (avec $s \in \mathbb{N}^*$). On définit alors

$$P(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i).$$

On note P' le polynôme dérivé de P .

Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^d \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $Q(M) = \sum_{k=0}^d \gamma_k M^k \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \{Q(M) \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :

- si $A, B \in \mathbb{C}[M]$, alors A et B commutent, et $A + B$ et AB appartiennent à $\mathbb{C}[M]$;
- si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in \mathbb{C}[M]$, alors $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$.

IV.A – Une méthode de Newton matricielle.

Q 26. Montrer que, pour toute racine complexe μ de P' , la matrice $M - \mu I_q$ est inversible. En déduire que $P'(M)$ est inversible.

Q 27. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M divise P^q . En déduire que $P(M)$ est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- M_n est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$;
- il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$;
- la matrice $P'(M_n)$ est inversible.

Q 28. Montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q 29. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices M et M_n commutent.

Q 30. On note A la limite de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que A est diagonalisable.

Q 31. On pose $N = M - A$. Justifier que A et N commutent et que N est nilpotente.

IV.B – Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables

Q 32. En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

Q 33. En déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$ lorsque N est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que M est à coefficients réels et trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et que le spectre de M est inclus dans \mathbb{R}_+^* .

On considère alors les matrices A et N introduites dans la sous-partie IV.A.

Q 34. Justifier que A et N sont à coefficients réels et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q 35. Montrer que le spectre de A est inclus dans \mathbb{R}_+^* .

Q 36. Justifier que la méthode de Héron d'Alexandrie de la sous-partie II.C peut être appliquée à la matrice A afin d'obtenir une racine carrée A' de A . En déduire l'expression d'une racine carrée de M .

• • • FIN • • •
