Devoir surveillé de Mathématiques n°5 : TYPE ccINP

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner un oiseau en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

EXERCICE 1

On pose $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(x^2)}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
On suppose que f est continue en $x = 0$.

Déterminer λ puis montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle : $Eq \Leftrightarrow x^2y''(x) + 4xy'(x) + (2 + x^2)y(x) = 1$

Le but de cet exercice est de trouver des solutions développables en série entière en 0 de Eq.

On suppose que y est une fonction développable en série entière en 0, de rayon de convergence $R > 0$, s'écrivant : $\forall x \in]-R; R[\ ,\ y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et solution de Eq sur $]-R; R[$

1°) Montrer rigoureusement que : $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2\ ,\ a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$

2°) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+2)!}$ et $a_{2p+1} = 0$

3°) Déterminer R et exprimer, pour $x \in]-R; R[$, $y(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On notera $B = (i, j, k)$ la base canonique de E.

I) Exemple

On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de E admettant A comme matrice relativement à la base canonique de E.

On note ϕ la rotation d'axe orienté $\mathbb{R}i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

2°) Déterminer C la matrice de ϕ relativement à B.

II) Une propriété utile au III)

Soit F une rotation de E.

3°) Montrer que F conserve le produit vectoriel.

III) Cas général

On considère désormais f une rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u$ et d'angle α et g une rotation d'axe orienté $\mathbb{R}v$ et d'angle θ. On suppose que u et v sont unitaires.

On pose $h = f \circ g \circ f^{-1}$.

4°) Montrer que h est une rotation d'axe orienté par $f(v)$. On notera alors β l'angle de cette rotation et on ne cherche pas à déterminer β dans cette question.

5°) Dans ce 5°) : y est un vecteur orthogonal à $f(v)$.

5°) a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$

5°) b) Montrer que : $h(y) = cos(\beta)f(x) + sin(\beta)f(v) \wedge f(x)$

5°) c) Montrer que : $h(y) = cos(\theta)f(x) + sin(\theta)f(v) \wedge f(x)$

5°) d) Que dire de θ et de β ?

6°) Utiliser les résultats précédents pour déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$

Problème 1 : Dunford

I) Décomposition de Dunford : généralités

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note I_n et 0_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, s'il existe $\Delta, N \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} i)\ A = \Delta + N \\ ii)\ \Delta \text{ est diagonalisable} \\ iii) N \text{ est nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } N^p = 0_n) \\ iv)\ \Delta N = N\Delta \text{ (autrement dit, les matrices } \Delta \text{ et } N \text{ commutent)} \end{cases}$$

alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A.

1) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1)a) Montrer que (Δ_1, N_1) est une décomposition de Dunford de A_1.

1)b) Montrer que (Δ_2, N_2) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2.

2) Soit A_3 une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

3) De même soit A_4 une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

4) Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A alors Δ et N commutent avec A.

II) Etude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) **Etude de Δ**

5) a) Montrer que Δ est diagonalisable et diagonaliser Δ, c'est-à-dire, trouver D une matrice diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice P inversible de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $\Delta = PDP^{-1}$

5) b) Montrer que Δ est inversible.

5) c) En déduire de manière élémentaire, que Δ^{-1} est diagonalisable et exprimer Δ^{-1} en fonction de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale D_1 à déterminer.

6) **Décomposition de A**

6)a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
6)b) Montrer que N est nilpotente
6)c) Montrer que : $\forall k \geq 1 \quad \Delta^k N = 2^k N$
6)d) Montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

7) **Décomposition de Dunford de** A^{-1}

On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$

7)a) Montrer que $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$

7)b) En déduire que N_1 est nilpotente.

7)c) Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$. En déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse.

7)d) Montrer que A est inversible.

7)e) Montrer que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$ et en déduire une décomposition de Dunford de A^{-1}

Problème 2

On définit la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On pose $H(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n x^n$, on note R son rayon de convergence et on pose $I =]-R;R[$.

On pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n x^n}{n}$ On note R_S le rayon de convergence de S et R_T celui de T.

1°) Déterminer R, R_S et R_T.

2°) Exprimer $H(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour $x \in I$.

3°) Soit L la primitive de H sur I vérifiant $L(0) = 0$

Montrer, en utilisant le 2°) que $\forall x \in I\ ,\ L(x) = \frac{(ln(1-x))^2}{2}$

4°) Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On utilisera h_n et on énoncera précisément le théorème utilisé.

5°) Montrer que : $\forall x \in I\ ,\ T(x) - S(x) = L(x)$

Désormais y désigne un réel tel que : $y \in]0;1[$

6°) a) Rappeler sans justification le développement en série entière de $x \mapsto ln(1-x)$

6°) b) Justifier que $\int\limits_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$\int\limits_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du + S(y) = 0$

6°) c) Justifier que $\int\limits_0^1 \frac{ln(1-u)}{u}du$ est une intégrale convergente.

6°) d) On admet que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Montrer que : $\int\limits_0^1 \frac{ln(1-u)}{u}du = \frac{-\pi^2}{6}$

7°) a) Montrer que : $\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + ln(y)ln(1-y)$

7°) b) Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.