# Chapitre 16 : Probabilité

## 1 Outils pour les probabilité

*Extraits du programme :*

*- la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition*

*- l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés est hors programme*
*Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est réservé au contexte probabiliste.*

*Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.*

### 1.1 Ensembles dénombrables

#### 1.1.1 Rappel ensemble finie

On rappelle que $I$ est un ensemble fini si il est en bijection avec $[\![1;n]\!]$ et que $n$ est appelé **cardinal de $I$**

On note $n = card(I) = \#I$ et cet entier naturel est unique.

Par convention $card(\emptyset) = 0$.

On dit que **$I$ est infinie si $I$ n'est pas finie.**
On peut écrire $I = \{x_i \ ; \ i \in [\![1;n]\!]\}$ par extension.

#### 1.1.2 Ensembles dénombrables

**Définition.** *Un ensemble $I$ est dit* **dénombrable si il est en bijection avec $\mathbb{N}$.**

**Remarques.** *On dit qu'un ensemble dénombrable ou fini est* **au plus dénombrable.**
*Un ensemble dénombrable est un ensemble infini dont on peut numéroter les éléments.*
*$I$ peut s'écrire $I = \{x_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ par extension.*

#### 1.1.3 Exemples élémentaires

**Théorème .** **$\mathbb{N}$ est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .** **$\mathbb{Z}$ est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .** **$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .** **$\mathbb{Q}$ est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .** **$\mathbb{R}$ et $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrable.**

preuve : HP

#### 1.1.4 Propriétés

**Théorème .** *Si $E$ et $F$ sont au plus dénombrables alors*
*$E \times F$ est* **au plus dénombrable.**
*Si $F \subset E$ et si $E$ est au plus dénombrable alors $F$ est* **au plus dénombrable.**
*Si $I$ est au plus dénombrable et si $\forall i \in I$ , $A_i$ est au plus dénombrable alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est* **au plus dénombrable.**

## 1.2 Familles sommables

### 1.2.1 Définition

**Définition.** *Une famille au plus dénombrable* $(x_i)_{i\in I}$ *de réels* **positifs** *est dite* **sommable** *quand il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que pour toute partie finie* $J$ *de* $I$ : $\sum\limits_{j\in J} x_j < M$

*Dans ce cas on appelle somme de la famille et on note* $\sum\limits_{i\in I} x_i$ *la borne supérieure des valeurs* $\sum\limits_{j\in J} x_j$ *lorsque* $J$ *parcourt l'ensemble des parties finies de* $I$.

*On a alors :* $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sup(\{\sum\limits_{j\in J} x_j \ , \ J \textbf{ partie finie de } I\})$

**Remarque.** *On autorise parfois la valeurs* $+\infty$ *pour les* $x_i$ *et on a alors* $\sum\limits_{i\in I} x_i = +\infty$

### 1.2.2 Généralisation

**Définition.** *Une famille au plus dénombrable* $(x_i)_{i\in I}$ *de complexes est dite* **sommable si** $(|x|_i)_{i\in I}$ **est sommable.**

**Remarque.** *Si* $I = \mathbb{N}$ *alors la sommabilité de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *équivaut à la convergence absolue de* $\sum u_n$

**Lemme.** *Si pour tout* $i \in I$ *on a :* $|x_i| \leq y_i$ *alors la sommabilité de* $(y_i)_{i\in I}$ *implique celle de* $(x_i)_{i\in I}$

### 1.2.3 Sommation par paquets

**Théorème .** *Soit une famille au plus dénombrable* $(x_i)_{i\in I}$ *de réels positifs, alors si l'on a une partition de* $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *(on a donc* $p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \emptyset$*), alors :* $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{i\in I_n} x_i$

preuve : HP

**Remarque.** *On pourra utiliser d'autres propriétés comme la linéarité, la croissance, Fubini etc ... sans vraiment justifié ...*

### 1.2.4 Exemple

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{2^p}{(q+p)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p+q=k} \frac{2^p}{(q+p)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{2^p}{k!} = \dots$$

# 2 Espace probabilisable

## 2.1 Tribus

### 2.1.1 Définition

**Définition.** *Soit $\Omega$ un ensemble appelé* **univers**. *$\mathscr{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de $\Omega$.*
*On appelle* **tribu sur $\Omega$** *tout sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- stabilité par passage au complémentaire *: si $A \in \mathscr{A}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$*
- stabilité par union dénombrable *: pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a* $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

*Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé* ***espace probabilisable.***

*Tout élément de $\mathscr{A}$ est appelé* ***événement.***

**Remarques.** *On parle aussi de $\sigma$ algèbre ...*
*On notera $\overline{A} = \Omega \backslash A = \{x \in \Omega \ , \ x \notin A\}$, le complémentaire de $A$, attention à la notation (rien à voir avec l'adhérence ici ...)*

### 2.1.2 Premiers exemples

**Théorème .** • *$(\Omega, \emptyset)$ est une tribu.*
• *$\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu.*
• *Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ alors $(\Omega, \emptyset, A, \overline{A})$ est une tribu.*

**Remarque.** *Très souvent dans les exercices ont utilise la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$*

preuve :

### 2.1.3 Propriétés

**Théorème .** *Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur $\Omega$ alors :*
• $\emptyset \in \mathscr{A}$
• stabilité par intersection dénombrable *: pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a* $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$
• **$\mathscr{A}$ est stable par union et intersection finie.**
• $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A\backslash B \in \mathscr{A}$

preuve :

## 2.2 Vocabulaire probabiliste

### 2.2.1 Définitions

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable au plus dénombrable que l'on écrit $\Omega = \{\omega_k \ , \ k \in I\}$ avec $I$ au plus dénombrable.

Alors :

- les singletons $\{\omega_k\}$ sont appelés **événements élémentaires.**
- l'événement $\Omega$ est appelé **événement certain**
- l'événement $\emptyset$ est appelé **événement impossible**
- les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés **événement**

### 2.2.2 Evénement contraire

**Définition.** *Soit $A$ un événement de $\mathscr{A}$ alors on définit le complémentaire de $A$ dans $\Omega$ par $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \ , \ \omega \notin A\}$.*
*On dit que $\overline{A}$ est* **l'événement contraire de $A$**, *c'est l'événement "A ne se produit pas".*

**Remarque.** $\overline{\overline{A}} = A$

### 2.2.3 Union et intersection

**Définitions.** *Soit $A$ et $B$ deux événements de $\mathscr{A}$. Alors :*
*$A \cup B$ est un événement appelé* **"$A$ ou $B$"**
*$A \cap B$ est un événement appelé* **"$A$ et $B$"**
*Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que* **$A$ et $B$ sont incompatibles**
*Si $A \subset B$ on dit que* **l'événement $A$ implique l'événement $B$.**

### 2.2.4 Suite infinie d'événements

**Définitions.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'événements de $\mathscr{A}$. Alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sont des événements de $\mathscr{A}$ définis par :* $\begin{cases} \omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ w \in A_{n_0} \\ \omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ w \in A_n \end{cases}$

**Remarques.** $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ : **au moins un $A_n$ est réalisé**
$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ : **tous les $A_n$ sont réalisés**
*Pour se ramener à un nombre fini d'événements on peut prendre les $A_n$ constant égaux à $A_{n_0}$ à partir d'un certain rang.*

### 2.2.5 Système complet d'événements

**Définition.** *On dit qu'une suite infinie d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ est* **un système complet d'événements** *si et seulement si*

- $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall m \in \mathbb{N} \ , \ n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$

**Remarque.** *En général on choisit les $A_n$ non vide.*

#### Cas particulier : système fini

En prenant les $A_p$ vide à partir du rang $n+1$ on obtient un système fini complet d'événements. On a alors : $(A_p)_{p\in[\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements si et seulement si

- $\forall i \in [\![1;n]\!] \ , \ \forall j \in [\![1;n]\!] \ , \ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{p\in[\![1;n]\!]} A_p = \Omega$

**Remarque.** *Si $A$ est un événement alors* $(A, \overline{A})$ **est un système complet d'événements.**

### 2.2.6 Lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste

Les opérations ensembliste correspondant à des propriétés logiques, les termes du langage probabiliste se retrouvent en langage ensembliste.

| Langage probabiliste | langage ensembliste |
|---|---|
| Un résultat d'expérience | $\omega$ un élément de $\Omega$ |
| événement élémentaire | $\{w\}$ un singleton de $\mathscr{A}$ |
| événement | $A$ élément de $\mathscr{A}$ |
| événement certain | $\Omega$ |
| événement impossible | $\emptyset$ |
| l'événement $A$ ne se produit pas | $\overline{A}$ |
| événement $A$ ou $B$ | $A \cup B$ |
| événement $A$ et $B$ | $A \cap B$ |
| $A$ et $B$ sont incompatibles | $A \cap B = \emptyset$ |
| $A$ implique $B$ | $A \subset B$ |
| système complet d'événement | union disjointe |

### 2.2.7 Exemples

Soit $\Omega$ l'ensemble des résultats du lancer de deux dés. Exemples d'événements ...

Soit $\Omega$ l'ensemble des tirages d'une suite infinie de Pile ou Face. Exemples d'événements, de tribus, ...

# 3 Probabilité

## 3.1 Cas fini : rappel de première année

### 3.1.1 Définition

**Définition.** *Soit $\Omega$ un univers* **fini**. *On appelle* ***probabilité*** *sur $\Omega$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- *Pour tout événements $A$ et $B$* **incompatibles :**
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

**Remarques.** *On a pris $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ comme tribu (comme dans le programme de sup), c'est généralement ce que l'on fait sur un univers finis. (mais on peut prendre une autre tribu comme ci-dessous dans le cas général)*
*La deuxième propriété est appelée* **additivité**.
*Sur un même univers il existe plusieurs probabilités, on dit que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.*

### 3.1.2 Cas particulier : probabilité uniforme

**Définition.** *Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, .., \omega_n\}$ est un univers fini alors on peut définir sur $\Omega$ une probabilité particulière appelée* **probabilité uniforme** *telle que : $\forall \omega \in \Omega$ , $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)}$*
*On a alors $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$ , $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$*

preuve :

**Remarque.** *On parle aussi d'équiprobabilité.*

**Exemple.** *Si on lance un dé à 6 faces et que l'on considère tous les résultats comme équiprobable. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat pair.*

## 3.2 Cas général

**Définition.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable au plus dénombrable.*
*On appelle* **probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathscr{A}$ dans $[0;1]$ vérifiant :**

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- *Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **deux à deux incompatibles :**

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

**Remarques.** *La deuxième propriété s'appelle $\sigma$* **additivité** *et on a convergence de la série.*
*Sur un même univers il existe plusieurs probabilités, on dit que $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.*
*La somme est indexée par $n \in \mathbb{N}$ car comme on a une série de nombre positifs la série est absolument convergente et donc l'ordre de sommation n'a pas d'importance (cf cours sur les séries).*
*On a bien sûr : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$*

## 3.3 Evénements particuliers

**Définitions.** *Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. Soit $A$ un événement de $\mathscr{A}$. Alors :*
*$A$ est dit* **négligeable** *si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$.*
*$A$ est dit* **presque sûr** *si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 1$.*

**Remarque.** *Il peut y avoir d'autres événements presque sûr ou négligeable que $\Omega$ ou $\emptyset$.*

## 3.4 Exemples

### 3.4.1 Germe de probabilité

**Théorème .** *Soit* $\Omega = \{\omega_k \ , \ k \in \mathbb{N}\}$ *un univers dénombrable. Soit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs tels que* $\sum p_n$ *soit convergente et que* $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
*Alors il existe une unique probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \mathbb{P}(\{w_n\}) = p_n$.

preuve : HP

### 3.4.2 Exemple 1

Soit un univers $\Omega = \{\omega_k \ , k \in \mathbb{N}\}$. On pose $\mathbb{P}(\{w_n\}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Alors on montre que $\mathbb{P}$ définit une probabilité sur $\Omega$.

### 3.4.3 Exemple 2

On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtenir un pile.

## 3.5 Propriétés

**Propriété.** *1 : Additivité finie*
*Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un space probabilisé au plus dénombrable.*
*Soit* $A$ *et* $B$ *deux événements incompatibles, alors :* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

*Plus généralement si* $(A_p)_{p\in\{1..n\}}$ *est une union finie d'événements incompatibles alors :* $\mathbb{P}(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) = \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p)$

preuve :

**Propriété.** *2*
*Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un space probabilisé au plus dénombrable.*
*Soit* $A$ *et* $B$ *deux événements. Alors :* $\begin{cases} \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \\ A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \ \textbf{(on dit que } \mathbb{P} \textbf{ est croissante)} \\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{cases}$

preuve :

**Propriété.** *3 Continuité croissante*
*Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un space probabilisé au plus dénombrable.*
*Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que :* $\forall n \in \mathbb{N} \ A_n \subset A_{n+1}$. *Alors :*
$\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

preuve :

**Propriété.** *4 : Continuité décroissante*
*Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un space probabilisé au plus dénombrable.*
*Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que :* $\forall n \in \mathbb{N} \ A_n \supset A_{n+1}$. *Alors :*
$\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

preuve :

**Propriété.** *5 : Sous additivité finie et infinie*
*Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un space probabilisé au plus dénombrable.*
*Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. Alors :* $\forall N \in \mathbb{N} \ , \ \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n)$ *et* $\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

preuve :

## 3.6 Exemple

probabilité de n'obtenir que des piles ...

# 4 Conditionnement

On considère dans cette section $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé au plus dénombrable.
On retrouvera dans le cas finie les notions étudiées en sup, il s'agit ici de les généraliser.

## 4.1 Probabilités conditionnelles

## 4.2 Définition

**Définition.** *Soit $B$ un événement de probabilité non nulle. Soit $A$ un événement de $\mathscr{A}$.*
*Alors on appelle* **probabilité de $A$ sachant $B$** *et on note $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A|B)$ la valeur suivante :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Remarques.** *$\mathbb{P}_B(A)$ est bien défini car $\mathbb{P}(B) > 0$.*
*$\mathbb{P}(A|B)$ se lit :"probabilité de $A$ sachant $B$".*
*Attention à ne pas confondre $A|B$ avec $A\backslash B$ la différence ensembliste.*

## 4.3 Théorème

**Théorème .** *Soit $B$ un événement de probabilité non nulle. Alors :*
*l'application $p_B$ de $\mathscr{A}$ dans $[0;1]$ définie par :*
*$\forall A \in \mathscr{A}$ , $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ appelée* **probabilité conditionnelle à $B$.**

**Remarques.** *Puisque $\mathbb{P}_B$ est une probabilité alors : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$ , $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$*
*Attention, ne pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A|B)$*

preuve :

## 4.4 Formule des probabilités composées

### 4.4.1 Avec deux événements

**Théorème .** *Soit $A$ et $B$ deux événements de probabilités non nulles. Alors :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

preuve : Par définition $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ donc en multipliant par $\mathbb{P}(B)$ on obtient
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$

### 4.4.2 Avec $n$ événements

**Théorème .** *Soit $n$ un entier supérieur ou égale à 2. Soit $(A_1, A_2, ..., A_n)$ une famille d'événements telle que :*
*$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \neq 0$. Alors :*
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)...\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1})$

preuve : Par récurrence sur $n$.

Initialisation au rang $n = 2$ on veut $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)$. C'est la formule du a).

Hérédité : On suppose la formule vraie au rang n.

Par la formule au rang 2 on a : $\mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

En utilisant l'hypothèse au rang $n$ alors :

$\mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)...\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

### 4.4.3 Exemple

Les joueurs de l'ASSE descendent un par un du bus et de manière équiprobable. Il y a 7 droitiers et 4 gauchers.
Quelle est la probabilité pour que les 3 premiers à sortir soit droitiers et que le quatrième soit gaucher ?

## 4.5 Formules des probabilités totales

### 4.5.1 Cas fini

**Lemme.** *Soit* $(A_1, A_2, .., A_n)$ *un système complet d'événements de probabilités non nulles (i.e.* $\forall k \in [\![1..k]\!] \quad \mathbb{P}(A_k) \neq 0$*). Soit* $B$ *un événement. Alors :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

preuve :

### 4.5.2 Cas particulier important

Si on prend $A$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \neq 1$ alors on peut appliquer le lemme précédent avec $(A, \overline{A})$ et on obtient : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$

preuve :

### 4.5.3 Cas infini

**Lemme.** *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un système complet d'événements de probabilités non nulles (i.e.* $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(A_k) \neq 0$*). Soit* $B$ *un événement. Alors* **la série** $\sum \mathbb{P}(B \cap A_n)$ **est convergente et**

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

**Remarques.** *Si on a une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux incompatibles telle que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ *alors on dit que l'on a* **un système quasi-complet d'événements** *et la formule des probabilités totates ci-dessus reste valable.*
*Par convention, si* $\mathbb{P}(A_n) = 0$ *on pose* $\mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) = 0$.

preuve :

### 4.5.4 Exemple

Dans un club de tennis, il y a deux fois plus de gauchers que de droitiers, un gaucher sur 4 a un revers à une main et un droitier sur deux a un revers à une main.
Quelle est la probabilité qu'un joueur ait un revers une main ?

## 4.6 Formule de Bayes ou formule de probabilités des causes

**Théorème .** *Soit* $A$ *et* $B$ *deux événements de probabilités non nulles. Alors :*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

preuve :

**Remarques.** *Cette formule permet (en quelque sorte) de remonter le temps.*
*On peut combiner formule de Bayes et formule des probabilités totales :*
*Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un système complet d'événements de probabilités non nulles et* $B$ *un événement quelconque. Alors :*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)}$$

#### 4.6.1 Exemple

Dans une équipe de rugby 40% des avants et 15% des trois-quarts mesurent plus de 1m85.
Il y a 60% d'avant.

On prend aléatoirement un joueur de plus d'1m85, quelle est la probabilité que ce soit un trois-quart ?

### 4.7 Interprétation en terme d'arbres des formules du paragraphe

## 5 Indépendance

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

### 5.1 Indépendance de deux événements

**Définition.** *(Rappel)*
*Soit $A$ et $B$ deux événements. Alors $A$ et $B$ sont dit* **indépendants** *si et seulement si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

**Remarques.** *En particulier si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors :*
$A$ **et** $B$ **sont indépendants** $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$
*De même si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors : $A$ et $B$ sont indépendants $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$*
*Indépendance et incompatibilité sont deux notions distinctes. L'indépendance dépend de la probabilité alors que l'incompatibilité est une notion uniquement ensembliste.*

**Exemple.** *1*
*Si on tire de manière équiprobable une carte dans un jeu de 32.*
*On considère les événements : A=tirer un Roi et B=tirer un coeur*
*Alors $A$ et $B$ sont indépendants mais pas incompatible.*

**Exemple.** *2*
*On lance deux fois une pièce qui a la probabilité $p \in ]0;1[$ de faire pile.*
*On considère $A = \{PF; FF\}$ et $B = \{PF; FP\}$*
*Alors l'indépendance de $A$ et $B$ dépend de $p$ ...*

### 5.2 Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements

**Définition.** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. Alors :*

1. *Les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont* **indépendants deux à deux** *si et seulement si*

$$\forall (i,j) \in I^2 \ , \ i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

2. *Les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont* **mutuellement indépendants** *si et seulement si pour tout sous ensemble fini $J$ de $I$*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

**Remarque.** *L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, la réciproque est fausse.*

**Exemple.** *Lancer deux fois d'une pièce équilibrée avec*
*$A = \{PF; PP\}$ , $B = \{PF; FF\}$ et $C = \{PP; FF\}$ qui sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.*

### 5.3 Propriétés

**Propriété.** *1*
*Soit $A$ et $B$ deux événements indépendants. Alors :* $A$ **et** $\overline{B}$ **sont indépendants.**

preuve:

**Remarque.** *On peut en déduire que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

**Propriété.** *2*
*Toute sous famille d'une famille mutuellement indépendante* **est mutuellement indépendante.**

preuve:

**Propriété.** *3*
*Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Soit $p \in \{1..n-1\}$. Alors :*
$A_1 \cap ... \cap A_p$ *et* $A_{p+1} \cap ... \cap A_n$ *sont indépendants*
$A_1 \cup ... \cup A_p$ *et* $A_{p+1} \cup ... \cup A_n$ *sont indépendants*
$A_1 \cap ... \cap A_p$ *et* $A_{p+1} \cup ... \cup A_n$ *sont indépendants*
$A_1 \cup ... \cup A_p$ *et* $A_{p+1} \cap ... \cap A_n$ *sont indépendants*

preuve:

# Sommaire