A rendre le lundi 2 février 2026

Devoir à la maison n°9 de Mathématiques

Code couleur :	noir	à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile (ou 5/2 uniquement)

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$

Montrer que : $max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$

Exercice 2 : nombre de surjection

Pour $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on note $S(n, p)$ le nombre de surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$

1°) a) Calculer $S(n, p)$ dans le cas $p > n$

1°) b) Calculer $S(n, 1)$, $S(n, 2)$ et $S(n, n)$

1°) c) Calculer $S(n + 1, n)$

2°) On suppose $n > 1$ et $p > 1$. Montrer que : $S(n, p) = p\big(S(n - 1, p) + S(n - 1, p - 1)\big)$

3°) a) Ecrire une fonction Python, utilisant les résultats précédents, permettant de calculer $S(n, p)$
b) Etudier la terminaison, la correction et étudier la complexité de votre fonction.

4°) Montrer que : $S(n, p) = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$

Exercice 3 : Oral Mines-télécom 2025

Une urne contient 2 boules blanches et une boule rouge.
On effectue des tirages avec remise. On suppose que les tirages sont indépendants et équiprobables.
Il y a deux joueurs A et B. Chaque joueur tire une boule à tour de rôle et A commence.
La partie se termine quand deux boules blanches sont tirées d'affilées pour la première fois.
Le vainqueur est celui qui tire la deuxième boule blanche de la série.

Quelle est la probabilité que A gagne ?

Exercice 4

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite.
On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles ET avec trois chiffres significatifs.

1°) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?

2°) Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?

3°) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?

4°) Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Exercice 5 : Oral ccINP 2024 et 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible $\Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Calculer le rang de B en fonction de n et du rang de A.

3) Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.

4) Montrer que : $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow x \in sp(B)$

5) Montre que si A est inversible avec n valeurs propres distinctes, alors B est diagonalisable.

Exercice 6 : Oral ccINP 2025

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = f(\frac{3}{16x})$

1) Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on notera (E).

2) Trouver une solution de (E) de la forme : $x \mapsto x^\alpha$

3) Trouver les fonctions f répondant au problème.

BONUS : faire ou refaire le DS n°5