# Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°8

## EXERCICE 0

### 1) Calcul du polynôme caractéristique de $A$

Soit $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$.
Alors $\chi_A(X) = det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-5 & -3 \\ 6 & X+4 \end{vmatrix} = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$

### 2) Recherche du spectre de $A$

$\chi_A(X) = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 2$

$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$ donc $sp(A) = \{-1, 2\}$

$A$ admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ donc $A$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$

### 3) Recherche des sous-espaces propres de $A$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) = ker(A + I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ -6x - 3y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = -2x$

On a donc $E_{-1}(A) = Vect(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) = ker(A - 2I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ -6x - 6y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = -x$

On a donc $E_2(A) = Vect(e_2)$ avec $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

### 4) Diagonalisation de $A$

$A$ est diagonalisable. On obtient une base diagonalisant $A$ par réunion des bases des sous-espaces propres.
Par la formule de changement de bases on a :

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

### 5) Calcul de $A^n$

$det(A) = -2 \neq 0$ donc $A$ (et donc $D$) est inversible. On a donc : $\forall n \in \mathbb{Z}$ , $\quad A = PD^nP^{-1}$
Comme $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ A^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2(-1)^n - 2^n \end{pmatrix}}$$

Remarque : calcul fait avec Maple (logiciel de calcul formel)

# Exercice 1 : e3A PC 2020

1.) Calculons le polynôme caractéristique de $M_a$ :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$$

On en déduit que $sp(A) = \{-1, 1\}$ avec 1 qui est valeur propre double.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(M_a - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 0 \\ -y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay=0 \\ z=y \end{cases}$$

CAS 1 : $a = 0$

Alors $ker(M_a - I_3)$ est le plan d'équation $y = z$ donc $dim(ker(M_a - I_3)) = 2$
$-1$ est valeur propre simple de $M_a$ donc $dim(ker(M_a + I_3)) = 1$

On a donc $dim(ker(M_a - I_3)) + dim(ker(M_a + I_3)) = 2 + 1 = 3$ et $M_a \in M_3(\mathbb{R})$, la somme des dimensions des sous espaces propres vaut 3, donc $M_a$ est diagonalisable.

CAS 2 : $a \neq 0$

Alors $ker(M_a - I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ et donc $dim(ker(M_a - I_3)) = 1$ alors que 1 est valeur propre double.
On en déduit que $M_a$ n'est pas diagonalisable.

Bilan : $\boxed{M_a \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow a = 0}$

2.) $det(M_a) = -1$ donc $\boxed{M_a \text{ est inversible pour toute valeur de } a}$

3.) Puisque $M_a$ n'est pas diagonalisable on a : $a \neq 0$
On pose $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur trouvé en 1.) de telle sorte que : $M_a e_2 = e_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(M_a + I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay = 0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = \frac{-a}{2} y \end{cases}$$

On pose alors $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ de telle sorte que : $Me_1 = -e_1$

On cherche $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $M_a e_3 = e_2 + e_3$

$$M_a e_3 = e_2 + e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 1 \\ -y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = \frac{1}{a} \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

Posons $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, $B' = (e_1, e_2, e_3)$ et notons $B$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors $det_B(B') = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{a} \\ 2 & 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{4}{a} \neq 0$

Donc $B'$ est une base, comme de plus $\begin{cases} M_a e_1 = -e_1 \\ M_a e_2 = e_2 \\ M_a e_3 = e_2 + e_3 \end{cases}$ alors, par la formule de changement de base $M_a = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{a} \\ 2 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{M_a \text{ est bien semblable à } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

## Exercice 2 : (oral ccINP PSI 2025)

1) Notons $\begin{cases} A = M_B(u) \text{ la matrice de } u \text{ relativement à } B \\ X = M_B(x) \text{ la matrice des coordonnées de } x \text{ dans } B \\ Y = M_B(y) \text{ la matrice des coordonnées de } y \text{ dans } B \end{cases}$

Alors : $< u(x), y >= (AX)^T Y = (X^T A^T) Y = X^T (A^T Y) =< x, u^*(y) >$

On a donc bien : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \ , \ < u(x), y >=< x, u^*(y) >}$

2) Soit $x \in F^{\perp}$
Alors, pour $y \in F$ on a en utilisant le 1) : $< y, u^*(x) >=< \underbrace{u(y)}_{\in F}, \underbrace{x}_{\in F^{\perp}} >= 0$ en utilisant que $F$ est stable par $u$ et la définition de $F^{\perp}$.
Donc $\forall y \in F \ , \ < y, u^*(x) >= 0$ et donc $u^*(x) \in F^{\perp}$

Donc : $\forall x \in F^{\perp}, \ , \ u^*(x) \in F^{\perp}$ et on a bien : $\boxed{F \text{ stable par } u \Rightarrow F^{\perp} \text{ stable par } u^*}$

3) a) • Calculons le polynôme caractéristique de $A$
On a : $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$

• $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$

Donc $ker(A - I_3) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ qui est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double de $A$.
Donc $A$ n'est pas diagonalisable.

- $A$ et $A^T$ ont même spectre.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A^T - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -3x + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = z = 0$$

Donc $ker(A^T - I_3) = vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ qui est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double de $A^T$.

Donc $A^T$ n'est pas diagonalisable.

Bilan : $\boxed{A \text{ et } A^T \text{ ne sont pas diagonalisables.}}$

3) b) • Commençons par chercher les droites stables de $u$ à l'aide des valeurs propres.

On a déjà trouvée $vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ au 3)a )

Avec la valeur propre 2, on trouve $vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

- Pour trouver les plans stables de $u$, on va utiliser le 2) et les droites stables de $u^*$.

Par le 3) a) $vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est stable par $u^*$ donc le plan d'équation $y = 0$ est stable par $u$

Avec la valeur propre 2 : $vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ est stable par $u^*$ et donc le plan d'équation $2y + z = 0$ est stable par $u$.

- Les sous-espaces stables par $u$ sont donc : $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \\ \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \\ vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ \text{le plan } y = 0 \\ \text{le plan } 2y + z = 0 \end{cases}$

# PROBLÈME 1 : problème 2 de ccINP PSI 2025

Q21) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$ , $A(x) = exp(x) - 1 - x$
$A$ est dérivable et $A'(x) = exp(x) - 1$

On a donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $A(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On a donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ exp(x) \geq 1 + x \text{ avec égalité si et seulement si } x = 0}$

Q22) En appliquant Q21) avec $x = \frac{\lambda_i}{A} - 1$ on a : $\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!] \ , \ \frac{\lambda_i}{A} \leq exp\left(\frac{\lambda_i}{A} - 1\right)}$

Q23) En multipliant les inégalités de Q22) on obtient :
$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{A^n} \leq exp(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{A} - n) \Rightarrow \frac{G^n}{A^n} \leq exp(\frac{nA}{A} - n) = 1 \Rightarrow G^n \leq A^n \Rightarrow \boxed{G \leq A}$

Q24) Pour avoir l'égalité $G = A$, il faut l'égalité pour tout $i$ en Q22) donc $\frac{\lambda_i}{A} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = A$

$\boxed{\text{Pour avoir } G = A \text{, il faut que les } \lambda_i \text{ soit tous égaux.}}$

Q25) $S$ est symétrique réelle donc $\boxed{\text{diagonalisable dans } M_n(\mathbb{R})}$ d'après le théorème spectrale.

Si on note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de $S$ alors, d'après le cours : $\boxed{det(S) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } tr(S) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}$

Q26) Comme $S \in S_n^+$ les $\lambda_i$ sont positifs et on peut appliquer Q23) qui donne : $\boxed{(det(S))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{tr(S)}{n}}$

Q27) $(det(S))^{\frac{1}{n}} = \frac{tr(S)}{n}$ correspond au cas d'égalité dans Q23.
Mais, on sait que l'on a égalité dans Q23) si et seulement si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda_n$ donc si et seulement si $sp(S) = \{\lambda\}$
De plus, comme $S$ est diagonalisable alors $sp(S) = \{\lambda\} \Rightarrow S = \lambda I_n$

On a donc : $\boxed{(det(S))^{\frac{1}{n}} = \frac{tr(S)}{n} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ S = \lambda I_n}$

Q28) Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $s_{j,j} =< e_j, Se_j >> 0$ car $S \in S_n^{++}$

On a donc : $\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!] \ , \ s_{j,j} > 0}$

Q29) • $Det(D) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} > 0$ donc $D$ est bien inversible. On a : $D^{-1} = diag(\frac{1}{\sqrt{s_{1,1}}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{s_{n,n}}})$

Multiplier à droite par $D^{-1}$ revient à multiplier la j-ième colonne par $\frac{1}{\sqrt{s_{j,j}}}$

Multiplier à gauche par $D^{-1}$ revient à multiplier la i-ième ligne par $\frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$

On a donc que $\boxed{\text{le } (i,j)\text{ième coefficient de } D^{-1}SD^{-1} \text{ est } \frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i}s_{j,j}}}}$

• Si $i = j$ alors le $(i,j)$ième coefficient vaut $\frac{s_{i,i}}{\sqrt{s_{i,i}s_{i,i}}} = 1$, et comme $S$ est symétrique alors $D^{-1}SD^{-1}$ aussi.
De plus, si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a :
$< D^{-1}SD^{-1}X, X >$
$=< SD^{-1}X, D^{-1}X >$ car $D^{-1} \in S_n^{++}$
$=< SY, Y >> 0$ en posant $Y = D^{-1}X$ et car $S \in S_n^{++}$
On a donc bien $\boxed{D^{-1}SD^{-1} \in S_n^{++} \text{ avec les coefficients diagonaux égaux à 1.}}$

Q30) La question Q29) permet d'utiliser Q26) avec $D^{-1}SD^{-1}$.
On a alors : $\left(det(D^{-1}SD^{-1})\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}tr(D^{-1}SD^{-1})$
Mais comme on connaît les coefficients diagonaux de $tr(D^{-1}SD^{-1})$ on a : $tr(D^{-1}SD^{-1}) = n$
Alors : $\left(det(D^{-1})^2 det(S)\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1 \Rightarrow det(D^{-1})^2 det(S) \leq 1 \Rightarrow det(S) \leq det(D)^2$

On a donc : $\boxed{det(S) \leq \prod_{j=1}^{n} s_{j,j}}$

En utilisant Q27, on a que le cas d'égalité apparaît quand $D^{-1}SD^{-1} = \lambda I_n \Rightarrow S = \lambda D^2$ et donc :
$\boxed{\text{On a l'égalité } det(S) = \prod_{j=1}^{n} s_{j,j} \text{ quand } S \text{ est diagonale.}}$

Q31) $(M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM$ donc $M^TM$ est symétrique.
Soit $\lambda \in sp(M^TM)$, alors $\exists X \neq 0$ , $M^TMX = \lambda X$
En multipliant à gauche par $X^T$ :
$X^TM^TMX = X^T\lambda X \Rightarrow (MX)^T(MX) = \lambda X^TX \Rightarrow ||MX||^2 = \lambda \underbrace{||X||^2}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda \geq 0$

De plus si $\lambda = 0$ alors $det(M^TM) = 0$ donc $det(M) = 0$ ce qui n'est pas possible car $M$ est inversible.
Donc $sp(M^TM) \subset ]0, +\infty[$ et comme $M^TM$ symétrique alors $\boxed{M^TM \in S_n^{++}}$

Q32) • Si $M$ n'est pas inversible, alors $det(M) = 0$ et comme le membre de droite de (3) est clairement positif alors (3) est vérifiée.
Pour qu'il ait égalité il faut que le membre de droite (qui vaut $\prod_{k=1}^{n} ||C_k||$) soit nulle, donc que toute les colonnes soit nulles.
Dans ce cas, les vecteurs colonnes sont bien orthogonaux 2 à 2.

• Si $M$ est inversible alors par la question Q31) : $M^TM \in S_n^{++}$ et on peut appliquer Q30) pour avoir $det(M^TM) \leq \prod_{j=1}^{n} a_{j,j}$ ou l'on a posé : $M^TM = (a_{i,j})$
Mais $det(M^TM) = det(M)^2$ et $a_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2$ donc : $det(M)^2 \leq \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2$

En prenant la racine on obtient $|det(M)| \leq \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right)\right)^{1/2}$

• En regroupant les cas : $\boxed{\forall M \in M_n(\mathbb{R}) \ , \ |det(M)| \leq \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right)\right)^{1/2}}$

• Il nous reste la cas d'égalité dans le cas $M$ inversible.
Pour avoir égalité, il faut, d'après Q30, que $M^TM$ soit diagonale, comme le $(i,j)$ième coefficient de $M^TM$ est $< C_i, C_j >$ alors : on a égalité dans (3) si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille orthogonale.

• $\boxed{\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \text{ on a égalité dans (3) si et seulement si } (C_1, \dots, C_n) \text{ est une famille orthogonale.}}$

Q33) Si $|m_{i,j}| \leq 1$ alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$ et donc (3) devient : $|det(M)| \leq \left(\prod\limits_{j=1}^{n} n\right)^{1/2} = (n^n)^{1/2} = n^{n/2}$

Pour avoir égalité, il faut avoir égalité dans (3), donc $(C_1,\dots,C_n)$ famille orthogonale et de plus, il faut : $\forall j \in [\![1,n]\!]$ , $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1 \Leftrightarrow \forall (i,j)^2 \in [\![1,n]\!]^2$ , $m_{i,j}^2 = 1 \Leftrightarrow \forall (i,j)^2 \in [\![1,n]\!]^2$ , $|m_{i,j}| = 1 \Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!]$ , $||C_j|| = n$
$(C_1,\dots,C_n)$ est donc une famille orthogonale de vecteurs de norme $\sqrt{n}$ donc $M^TM = nI_n$

On a donc $\boxed{|det(M)| \leq \left(\prod\limits_{j=1}^{n} n\right)^{1/2} = (n^n)^{1/2} = n^{n/2} \text{ avec égalité ssi } M^TM = nI_n}$

Q34) $M \in \mathscr{H}_n \Leftrightarrow M^TM = nI_n \Rightarrow (\frac{M^T}{n})M = I_n$ donc $M$ est inversible et $M^{-1} = \frac{M^T}{n}$
On a alors : $(M^{-1})^T(M^{-1}) = (\frac{M^T}{n})^T\frac{M^T}{n} = \frac{1}{n^2}(MM^T) = \frac{1}{n^2}(nI_n) = \frac{1}{n}I_n$

On résout : $\frac{1}{n}I_n \neq nI_n \Leftrightarrow n = 1$

On a alors :

$\boxed{\text{Si } n \neq 1 \text{ alors } M \in \mathscr{H}_n \Rightarrow M \text{ inversible et } M^{-1} = \frac{M^T}{n} \text{ et } M^{-1} \notin \mathscr{H}_n}$

$\boxed{\text{Si } n = 1 : M \in \mathscr{H}_1 \Rightarrow M = 1 \text{ ou } M = -1 \text{ et on a } M \text{ inversible et } M^{-1} = M \in \mathscr{H}_1}$

Q35) • On pose $T = \begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ alors $T^T = \begin{pmatrix} M^T & M^T \\ M^T & -M^T \end{pmatrix}$
et $T^TT = \begin{pmatrix} 2MM^T & 0 \\ 0 & 2MM^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$

Comme les coefficients de $T$ sont des 1 ou des $-1$ alors, on a donc bien $\boxed{\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix} \in \mathscr{H}_{2n}}$

• En partant de $M = (1) \in \mathscr{H}_1$ , par le début de la question et itération on coonstruit des matrices de $\mathscr{H}_{2p}$.

On a donc : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \text{ , } 2^p \in \mathscr{H}}$

Q36) On pose $\ell_1 = card(\{i \in [\![1,n]\!] \text{ , } m_{i,1} = m_{i,2}\})$ et $\ell_2 = card(\{i \in [\![1,n]\!] \text{ , } m_{i,1} = -m_{i,2}\})$
Alors $< C_1, C_2 >= \ell_1 - \ell_2$.
Mais $M \in \mathscr{H}_n \Rightarrow < C_1, C_2 >= 0$ donc $\ell_1 = \ell_2$.
Comme on a aussi $\ell_1 + \ell_2 = n$ alors $n = 2\ell_1$ et donc $\boxed{n \text{ pair}}$

Q37) •On remarque que : $x + y$ est le nombre de 1 de la deuxième, $z + t$ est le nombre de $-1$ de la deuxième colonne, $x + z$ est le nombre de 1 de la troisième, $y + t$ est le nombre de $-1$ de la troisième colonne.

• Pour commencer on a clairement $x + y + z + t = n$ puisque tout les cas sont envisagés.

• Comme la première colonne ne contient que des 1 : $< C_1, C_2 >= 0 \Rightarrow x + y - z - t = 0$

• Comme la première colonne ne contient que des 1 : $< C_1, C_3 >= 0 \Rightarrow x - y + z - t = 0$

• $< C_2, C_3 >= 0 \Rightarrow x - y - z + t = 0$

$$\boxed{\text{On a donc le système } (sy) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=n \\ x+y-z-t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}}$$

Q38) $(sy)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=t \ (L_4-L_3) \\ y=t \ (L_4-L_2) \\ 2(x+t)=n \ (L_4+L_1) \\ x+y+z+t=n \ (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=t \\ y=t \\ x=n/2-t \\ n/2-t+t+t+t=n \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=n/4 \Leftrightarrow n=4x=4y=4z=4t$$

On a bien : $\boxed{n \text{ est un multiple de 4.}}$

# PROBLÈME 2 : Mines-Ponts 2025 PSI-PC math I

Q1) Avec les notations de l'énoncé.

$P(X) = \frac{1}{X^p} P(\frac{1}{X})$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k = \frac{1}{X^p} \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^{-k}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^{p-k}$ changement d'indice $i = k - p$ dans la deuxième somme et $i = p$ dans la première

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i = \sum\limits_{i=0}^{p} a_{p-i} X^i$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{p} (a_i - a_{p-i} X^i = 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, p]\!]$ , $a_k = a_{p-k}$ car seul le polynôme nul a une infinité de racines.

On a donc : $\boxed{P \text{ est réciproque si et seulement si } \forall k \in [\![0, p]\!] ,\ a_k = a_{p-k}}$

Q2) Avec l'écriture fournie par l'énoncé :

$$X^p P(\frac{1}{X}) = X^p a_p \prod_{i=1}^{d} (\frac{1}{X} - \lambda_i)^{m_i} = X^p a_p \prod_{i=1}^{d} (\frac{1 - X\lambda_i}{X})^{m_i} = a_p \frac{X^p}{X^{\sum\limits_{i=1}^{d} m_i}} \prod_{i=1}^{d} (1 - X\lambda_i)^{m_i}$$

Mais comme $\sum\limits_{i=1}^{d} m_i = p$ alors : $X^p P(\frac{1}{X}) = a_p \prod\limits_{i=1}^{d} (1 - X\lambda_i)^{m_i}$

Si $P$ est réciproque alors : $P(X) = a_p \prod\limits_{i=1}^{d} (1 - X\lambda_i)^{m_i}$

Et donc les $\lambda_i$ sont non nuls car sinon $P$ serait de degré $< p$ (terme en $(1 - X\lambda_i)$ de degré 0)

De plus $P(X) = a_p \prod\limits_{i=1}^{d} (1 - X\lambda_i)^{m_i} = a_p \prod\limits_{i=1}^{d} \lambda_i (X - \frac{1}{\lambda_i})^{m_i}$

$\boxed{\text{Si } P \text{ est réciproque, ses racines } \lambda_i \text{ sont non nuls et les } \frac{1}{\lambda_i} \text{ sont racines de même ordre de multiplicité que } \lambda_i.}$

Q3) • Si $Q$ est antiréciproque, en prenant $X = 1$ dans la relation caractérisant $Q$ on a :

$Q(1) = -1Q(1) \Rightarrow Q(1) = 0$ donc 1 est racine de $Q$.

• Comme 1 est racine de $Q$ on peut factoriser $Q$ par $X - 1$ et donc $\exists P \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ s'écrivant : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ tel que $Q(X) = (X - 1)P(X)$

Alors $Q(X) = -\frac{1}{X^d} Q(\frac{1}{X})$

$\Rightarrow (X - 1)P(X) = -\frac{1}{X^d} (\frac{1}{X} - 1) P(\frac{1}{X})$

$\Rightarrow (X - 1)P(X) = -\frac{1}{X^{d-1}} (1 - X) P(\frac{1}{X})$

$\Rightarrow (X - 1)P(X) = (X - 1) \frac{1}{X^{d-1}} P(\frac{1}{X})$

$\Rightarrow P(X) = \frac{1}{X^{d-1}} P(\frac{1}{X})$

donc $P$ est soit constant (si $d = 1$), soit réciproque.

• $\boxed{\text{Si } Q \text{ est antiréciproque, alors 1 est racine de } Q \text{ et } Q \text{ s'écrit } Q(X) = (X - 1)P(X) \text{ avec } P \text{ constant ou récipr}}$

Q4) On résout : $a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

En isolant les racines 1 et $-1$ de $R$, et en regroupant les racines $\lambda_i$ avec $\frac{1}{\lambda_i}$ qui a le même ordre de multiplicité que $\lambda_i$, on peut alors écrire $R$ sous la forme : $R(X) = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta \prod_{i=1}^{d} \Big( X - \lambda_i)(X - \frac{1}{\lambda_i}) \Big)^{\gamma_i}$

Le produit des racines de $R$ vaut donc $1^\alpha (-1)^\beta \times \prod_{i=1}^{d} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i} \right)^{\gamma_i} = \pm 1$

$\boxed{\text{Le produit des racines de } R \text{ vaut donc } 1 \text{ ou } -1.}$

Q5) On reprend l'écriture de $R$ donnée en Q4) :

$$\begin{aligned}
& X^p R(\tfrac{1}{X}) \\
&= X^p (\tfrac{1}{X} - 1)^\alpha (\tfrac{1}{X} + 1)^\beta \prod_{i=1}^{d} [(\tfrac{1}{X} - \lambda_i)(\tfrac{1}{X} - \tfrac{1}{\lambda_i})]^{\gamma_i} \\
&= (1-X)^\alpha (1+X)^\beta \prod_{i=1}^{d} [(1 - X\lambda_i)(1 - X\tfrac{1}{\lambda_i})]^{\gamma_i} \\
&= (1-X)^\alpha (1+X)^\beta \prod_{i=1}^{d} [\lambda_i(\tfrac{1}{\lambda_i} - X)\tfrac{1}{\lambda_i}(\lambda_i - X)]^{\gamma_i} \\
&= (1-X)^\alpha (1+X)^\beta \prod_{i=1}^{d} [(\tfrac{1}{\lambda_i} - X)(\lambda_i - X)]^{\gamma_i} \\
&= (-1)^\alpha (X-1)^\alpha (X+1)^\beta \prod_{i=1}^{d} [(X - \tfrac{1}{\lambda_i})(X - \lambda_i)]^{\gamma_i} \\
&= (-1)^\alpha R(X)
\end{aligned}$$

Si $\alpha$ est paire, $R$ est réciproque, si $\alpha$ est impaire, $R$ est antiréciproque.

On a donc : $\boxed{R \text{ est réciproque ou antiréciproque.}}$

---

Q6) Comme $A$ est inversible et $x \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
& det(xI_n - A) \\
&= det(I_n) det(xI_n - A) \text{ car } det(I_n) = 1 \\
&= det(AA^{-1}) det(xI_n - A) \text{ car } AA^{-1} = I_n \text{ puisque } A \in GL_n \\
&= det(A) det(A^{-1}(xI_n - A)) \\
&= det(A) det(xA^{-1} - I_n) \\
&= det(A) det\big(x(A^{-1} - \tfrac{1}{x} I_n)\big) \\
&= det(A) x^n det\big(A^{-1} - \tfrac{1}{x} I_n\big) \\
&= det(A) x^n (-1)^n det\big(\tfrac{1}{x} I_n - A^{-1}\big)
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{det(xI_n - A) = (-1)^n det(A) x^n det\big(\tfrac{1}{x} I_n - A^{-1}\big)}$

Q7) • Si $A$ est semblable à son inverse alors $A$ et $A^{-1}$ ont même déterminant et donc : $det(A) = det(A^{-1}) \Rightarrow det(A) = \frac{1}{det(A)} \Rightarrow det(A) = \pm 1$

$\boxed{\text{Si } A \text{ est semblable à son inverse alors : } det(A) = \pm 1}$

• La relation de Q6) donne alors : $\chi_A(X) = \pm X^n \chi_A(\frac{1}{X})$ et donc $\boxed{\chi_A \text{ est réciproque ou antiréciproque.}}$

Q8) On suppose $B$ diagonalisable et que son polynôme caractéristique est réciproque ou antiréciproque. Alors avec $Q2$ si $P$ est réciproque et Q3 (+Q2) si il est antiréciproque, on a que le spectre de $B$ peut s'écrire sous la forme :
$sp(B) = \{\lambda_i \ , \ i \in [\![1;d]\!] \cup \{\frac{1}{\lambda_i} \ , \ i \in [\![1;d]\!] \cup VPUN$ avec $VPUN = \emptyset$ ou $VPUN = \{1\}$ suivant si 1 est valeur propre ou non de $B$.
De plus $\lambda_i$ et $\frac{1}{\lambda_i}$ ont même ordre de multiplicité.
On remarque donc que 0 n'est pas valeur propre de $B$ et donc que $B$ est inversible.
Comme $B$ est diagonalisable on a $B$ semblable à $diag(I_z, J_1, \ldots, J_i, \ldots, J_d)$ ou $z$ est l'ordre de multiplicité de 1 comme valeur propre de $B$ (éventuellement 0) et $J_i$ est un bloc de la forme $J_i = diag(\lambda_i I_{\alpha_i}, \frac{1}{\lambda_i} I_{\alpha_i})$
On a alors $B^{-1}$ semblable à une matrice diagonale dont les valeurs sont les mêmes que celle de $B$ donc $B$ et $B^{-1}$ sont semblables.

$\boxed{\text{Si } B \text{ est diagonalisable et si son polynôme caractéristique est réciproque ou antiréciproque,}}$
$\boxed{\text{alors } B \text{ est inversible et semblable à } B^{-1}}$

Q9) Directement, en "lisant" $B$, 2 est valeur propre double de $B$ et $E_2(B) = Vect(e_1, e_2)$

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est $E_2(B^{-1}) = Vect(e_3)$ et est de dimension 1.
$dim(E_2(B)) \neq dim(E_2(B^{-1}))$ donc $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ ne sont pas semblable.}}$

---

Q10) Si $A = S_1S_2$ alors $A(S_2S_1) = S_1 \underbrace{(S_2S_2)}_{I_n} S_1 = S_1^2 = I_n$ donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et $A^{-1} = S_2S_1$

$A = S_1S_2 = S_1S_2 \underbrace{(S_1)^2}_{I_n} = S_1S_2S_1S_1 = S_1(S_2S_1)S_1 = S_1A^{-1}S_1 = S_1A^{-1}S_1^{-1}$ car $S_1 = (S_1)^{-1}$

Donc $A = S_1A^{-1}S_1^{-1}$ et donc $\boxed{A \text{ est semblable à } A^{-1}}$

Q11) Si $A = S_1S_2$ est le produit de deux matrices de symétries $S_1$ et $S_2$, alors une matrice semblable à $A$ est de la forme : $PAP^{-1} = PS_1S_2P^{-1} = \underbrace{PS_1P^{-1}}_{\text{symétrie}} \underbrace{PS_2P^{-1}}_{\text{symétrie}}$

Donc $\boxed{\text{si } A \text{ est le produit de deux matrices de symétrie,}}$
$\boxed{\text{toute matrices semblables à } A \text{ est aussi le produit de deux matrices de symétries.}}$

Q12) $S_1^2 = \begin{pmatrix} PQ & 0 \\ 0 & QP \end{pmatrix}$, donc $S_1$ matrice de symétrie si et seulement si $Q = P^{-1}$

$S_2^2 = (S_1A)^2$ avec $S_1A = \begin{pmatrix} 0 & PC \\ QB & 0 \end{pmatrix}$ donc $S_2^2 = \begin{pmatrix} PCQB & 0 \\ 0 & QBPC \end{pmatrix}$
Alors $S_2$ matrice de symétrie si et seulement si $PCQB = QBPC = I_n$
Avec $Q = P^{-1}$, $PCP^{-1} = B^{-1}$ et $P^{-1}BP = C^{-1}$, autrement dit $PCP^{-1} = B^{-1}$ (puisque les deux conditions sont équivalentes).

$\boxed{S_1 \text{ et } AS_1 \text{ sont des matrices de symétries} \Leftrightarrow PCP^{-1} = B^{-1}}$

Q13) Si $C$ est semblable à $B^{-1}$, alors $\exists P \in GL_n$ telle que $PCP^{-1} = B^{-1}$
Avec les calculs de Q12) on a alors : $S_1^2 = I_{2n}$ et $S_2^2 = I_{2n}$ donc $A = S_1^{-1}S_2$ est bien le produit de deux symétries.

$\boxed{\text{Si } C \text{ est semblable à } B^{-1}, \text{ alors } A \text{ est bien le produit de deux symétries.}}$

---

Q14) • Comme $g^{n-1} \neq 0$ alors $\exists x \in E$ tel que $g^{n-1}(x) \neq 0_E$
Montrons alors que $(x, g(x), \dots, g^{n-1}(x))$ est libre dans $E$.

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k g^k(x) = 0_E$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$
On peut alors poser $i = Min(\{k \in [\![0; n-1]\!]\ ,\ a_k \neq 0\})$ et on a $\sum\limits_{k=i}^{n-1} a_k g^k(x) = 0_E$
En composant par $g^{n-1-i}$ (avec $n-1-i \geq 0$) on a : $\sum\limits_{k=i}^{n-1} a_k g^{k+n-i}(x) = 0_E$
Et comme, pour $k > i$, on a $g^{k+n-i} = 0_{L(E)}$ alors il reste $a_i g^{p-1}(x) = 0_E \Rightarrow a_i = 0$ puisque $g^{n-1}(x) \neq 0_E$ ce qui contredit la définition de $i$. Absurde.

On a donc $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$ et on a montrer que la famille $(x, g(x), \dots, g^{n-1}(x))$ est libre dans $E$

• Comme cette famille est de cardinal $n$ et $dim(E) = n$ alors a que : $B = (g^{n-1}(x), g^{n-2}(x), \dots, g(x), x)$ est une base de $E$.
Comme $g(g^j(x)) = g^{j+1}(x)$ avec en particulier $g(g^{n-1}(x) = g^n(x) = 0_E$ alors la matrice de $g$ dans cette base est alors la matrice $N$.

$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } g \text{ est } N.}$

Q15) On commencer par remarquer que $N^n$ est nulle.
• Recherche : si on était en dimension 1, calculs formels :
$J_n(\lambda) = \lambda + N$ donc $(J_n(\lambda))^{-1} = \frac{1}{\lambda+N} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1+\frac{N}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{\lambda^k}$ car $N^n = 0$

• On pose alors : $J' = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{N^k}{\lambda^{k+1}}$ alors :

$$
\begin{aligned}
& J_n(\lambda)J' \\
&= (\lambda I_n + N)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{N^k}{\lambda^{k+1}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{N^k}{\lambda^k} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{N^{k+1}}{\lambda^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{N^k}{\lambda^k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{N^k}{\lambda^k} \\
&= I_n \text{ car } N^n \text{ est nulle}
\end{aligned}
$$

On a donc $\boxed{J_n(\lambda) \text{ inversible et } \left(J_n(\lambda)\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}I_n + N' \text{ avec } N' = \sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{N^k}{\lambda^{k+1}}}$

Q16) $N'^n$ est une matrice triangulaire supérieure de trace nulle, donc $N'^n = (0)$
De plus, comme la première surdiagonale n'est pas nulle, alors $N'^{n-1}$ n'est pas nulle.
En utilisant Q14), $N'$ est semblable à $N$, donc $\frac{1}{\lambda}I_n + N'$ est semblable à $\frac{1}{\lambda}I_n + N$ et donc

$\boxed{(J_n(\lambda))^{-1} \text{ est semblable à } J_n(\frac{1}{\lambda})}$

Q17) Clairement $\boxed{s_1^2 = s_2^2 = Id_E}$ avec $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$
On pose $Q = s_2(P)$ donc $Q(X) = P(1-X)$, alors :
$\Big((s_1 \circ s_2)(P)\Big)(X)$
$= s_1(Q)(X) = Q(-X) = P(1-(-X)) = P(X+1) = P(X+1) - P(X) + P(X) = (g + Id_E)(P)(X)$

Donc $\boxed{s_1 \circ s_2 = g + Id_E}$

Q18) Si $d$, le degré de $P$, est supérieur ou égal à 1, on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$

Alors $g(P)(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k[(X+1)^k - X^k]$
$= a_d[(X+1)^d - X^d] + a_{d-1}[(X+1)^{d-1} - X^{d-1}] +$ élément de $\mathbb{C}_{d-2}[X]$
$= a_d[X^d + dX^{d-1} - X^d] + a_{d-1}[X^{d-1} - X^{d-1}] +$ élément de $\mathbb{C}_{d-2}[X]$
$= \underbrace{da_d}_{\neq 0} X^{d-1} +$ élément de $\mathbb{C}_{d-2}[X]$
Donc $g(P)$ est de degré $d-1$.

Donc $\boxed{P \text{ non constant} \Rightarrow deg(g(P)) = deg(P) - 1}$

Q19) Posons $Q = X^n$ qlors, par Q18) : $B = (Q_n, g(Q_n), g^2(Q_n), \ldots, g^{n-1}(Q_n))$ est une famille de polynôme échelonée en degré. C'est donc une base de $E$ et on remarque que la matrice de $g$ relativement à $B$ est $N$.

La matrice de $s_1 \circ s_2 = g + Id_E$ est donc $J_n(1)$, comme c'est aussi celle de $s_1 \circ s_2$ et que $s_1$ et $s_2$ sont des symétries, alors on a : $\boxed{J_n(1) \text{ est le produit de deux matrices de symétries.}}$

---

Q20) Par blocs : $A'^{-1} = \begin{pmatrix} (J_{n_1}(\lambda_1))^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (J_{n_2}(\lambda_2))^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (J_{n_r}(\lambda_r))^{-1} \end{pmatrix}$
D'après Q16) : $(J_{n_k}(\lambda_k))^{-1}$ est semblable à $J_{n_k}(\frac{1}{\lambda_k})$

Donc, par blocs : $A'^{-1}$ est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}(\frac{1}{\lambda_1}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\frac{1}{\lambda_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{n_r}(\frac{1}{\lambda_r}) \end{pmatrix}$

Comme $A^{-1}$ est semblable à $A'^{-1}$ alors : $\boxed{A^{-1} \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} J_{n_1}(\frac{1}{\lambda_1}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\frac{1}{\lambda_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{n_r}(\frac{1}{\lambda_r}) \end{pmatrix}}$

Q21) $A$ étant semblable à son inverse, alors ses valeurs propres sont, soit 1, soit $-1$, soit $\lambda_i \notin \{-1, 1\}$ d'ordre $n_i$ avec $\frac{1}{\lambda_i}$ qui est aussi valeur propre d'ordre $n_i$.

$A$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec pour blocs : $J_k(1)$, $J_{k'}(-1)$ ou $K_i = \begin{pmatrix} J_{n_i}(\lambda_i) & 0 \\ 0 & J_{n_i}(\frac{1}{\lambda_i}) \end{pmatrix}$

On a déjà vu que $J_k(1)$ et $J_{k'}(-1)$ était le produit de deux matrices de symétries.

On peut appliquer à $K_i$ la question Q13) car $J_{n_i}(\lambda_i)$ et $J_{n_i}(\frac{1}{\lambda_i})$ sont semblables par Q16).
Alors $K_i$ est le produit de deux matrices de symétries.

En raisonnant par bloc, on peut alors conclure que $\boxed{A \text{ est le produit de deux matrices de symétries.}}$