Feuille d'exercices n°49 : chap. 17

Exercice 408. *Trouver les fonction f à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :*
$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) - f'(-x) = 0$

Exercice 409. *On pose $I =]0; +\infty[$.*

A) On considère l'équation différentielle suivante :
$E_1 \Leftrightarrow x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$
On cherche les solutions à valeurs réelles de E_1.
a) Chercher une solution y_p sous la forme : $y_p : x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
b) Chercher les solutions de E_1 sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)y_p(x)$ et résoudre E_1

B) On considère l'équation différentielle suivante :
$E_2 \Leftrightarrow x^2y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0$
On cherchera les solutions à valeurs réelles.
a) Chercher des solutions sous la forme : $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Résoudre E_2.

Exercice 410. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $ty''(t) - (2t+1)y'(t) + 2y(t) = 0$, en cherchant les solutions développable en série entière en 0.*

Exercice 411. *(changement de fonction inconnue)*
Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $E \Leftrightarrow xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = xe^x$ en effectuant le changement de fonction inconnue : $z(x) = xy(x)$

Exercice 412. *(changement de variable)*
On considère l'équation différentielle : $E \Leftrightarrow x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$ que l'on cherche à résoudre sur $I =]0; +\infty[$. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi(t) = exp(t)$
a) Montre que φ est une bijection de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans J, intervalle que l'on précisera.
Donner l'expression de φ^{-1} et vérifier que φ^{-1} est de classe C^2 sur son domaine J
Supposons que y soit une solution de E.
b) Montrer que l'on peut définir sur $\mathbb{R}$ une fonction g telle que $g(t) = y(\varphi(t))$ et que g est C^2
c) Donner une équation différentielle F vérifiée par g.
d) Résoudre F puis résoudre E

Exercice 413. Ricatti
On cherche à résoudre l'équation différentielle : $E \Leftrightarrow (1-x^3)y'(x) + x^2y(x) + y^2(x) - 2x = 0$ sur $I =]1, +\infty[$
a) Montrer que $Y(x) = x^2$ est une solution particulière de E.
b) Poser $y = Y + z$ et déterminer une équation différentielle F vérifiée par z.
c) Résoudre F en posant $Z = \frac{1}{z}$.