# Feuille d'exercices n°50 : chap. 17

**Exercice 414.** ($\star$)
*On cherche à résoudre sur* $I = ]0;+\infty[$ *l'équation différentielle :*
$E \Leftrightarrow xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 0$
*a) Effectuer le changement de fonction inconnue* $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$ *et déterminer* $F$ *une équation différentielle vérifiée par* $z$.
*b) Résoudre* $F$ *en effectuant le changement de variable* $u = x^2$.
*c) Résoudre* $E$.

---

**Exercice 415.** *Soit la fonction* $f$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
*a) Etudier la parité de* $f$
*b) Tracer la représentation graphique de* $f$

**Exercice 416.** *Déterminer les fonctions réelles définies sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$

**Exercice 417.** *a) Rappeler la définition de la fonction partie entière notée* $t \mapsto \lfloor t \rfloor$
*b) Soit la fonction* $f$ *définie par* $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = t^2(t - \lfloor t \rfloor)$
*c)* $f$ *est-elle continue en 0 ?*
*d)* $f$ *est-elle dérivable en 0 ?*
*e) Quels sont les points de discontinuité de* $f$ *?*
*f) Aux points de discontinuité, autre que 0,* $f$ *est-elle dérivable à gauche ? à droite ?*
*g) Tracer l'allure de la représentation graphique de* $f$

**Exercice 418.** *Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de :*
$f(t) = (ln(1+e^t), ch(t)^{\frac{1}{4}} - 1)$

**Exercice 419.** *a) Soit* $p \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $a(x) = x^p$
*Montrer que* $\forall k \in [\![0;p]\!] \quad a^{(k)}(x) = \frac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}$ *Que dire de* $a^{(k)}(x)$ *pour* $k > p$
*b) Soit* $p \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $b(x) = (1-x)^p$ *Déterminer pour* $k \in \mathbb{N}$ *l'expression de* $b^{(k)}(x)$
*c) Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = x^n(1-x)^n$
*Montrer que* $c^{(n)}(x) = n! \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}^2 (1-x)^{n-p} x^p$
*d) Calculer* $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$

**Exercice 420.** *On pose* $x(t) = \sqrt{t}cos(t)$ *pour* $t > 0$ *et* $x(t) = 0$ *pour* $t \leq 0$
*On pose* $y(0) = 0$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad y(t) = \frac{sin(t^2)}{t}$
*a) Etudier la régularité des fonctions* $x$ *et* $y$ *au point 0 (continuité, dérivabilité, caractère* $C^1$, *etc ...)*
*b) Tracer l'allure des courbes représentatives de* $x$ *et* $y$ *au voisinage du point d'abscisse* $t = 0$
*On pose* $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = (x(t), y(t))$ *et* $\Gamma = f(\mathbb{R})$
*c) Tracer l'allure de* $\Gamma$ *au voisinage du point de paramètre* $t = 0$