Feuille d'exercices n°51 : chap. 17

Exercice 421. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit l'application f_n de $I =]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :*
$\forall x \in I \quad f(x) = x^{n-1} ln(1+x)$
a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $\forall x \in I \quad h(x) = x^p$
Déterminer $h^{(k)}(x)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in I \quad f_n^{(n)}(x) = (n-1)! \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}$

Exercice 422. *On cherche les fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :* $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$
Résoudre ce problème en posant $z(t) = x(t) + iy(t)$

Exercice 423. *Résoudre le système différentie :* $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$

Exercice 424. *On pose* $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
a) Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
b) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 3y(t) - 7z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - 3y(t) + 6z(t) \end{cases}$

Exercice 425. *Déterminer les solutions réelles bornées du système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = y(t) + z(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases}$$

Exercice 426. *Déterminer les solutions réelles bornées du système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 5y(t) - z(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) - z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 5y(t) \end{cases}$$