Chapitre 17 : Equations différentielles linéaires scalaires ; Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Remarque. *Les fonctions considérées dans ce chapitre, sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Préliminaire : équation linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Soit $b \in F$. Alors on considère l'équation $Eq \Leftrightarrow f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$

On dit que $f(x) = b$ est une **équation linéaire**.

CAS 1 : $b \notin Im(f)$
Alors Eq n'admet pas de solution.

CAS 2 : $b \in Im(f)$
Alors $\exists x_p \in E$ tel que $f(x_p) = b$, on dit que x_p est une **solution particulière** de Eq.
On a alors :

$f(x) = b$
$\Leftrightarrow f(x) = f(x_p)$
$\Leftrightarrow f(x) - f(x_p) = 0_F$ par linéarité de f
$\Leftrightarrow f(x - x_p) = 0_F$
$\Leftrightarrow x - x_p \in ker(f)$
$\Leftrightarrow x = x_p + x_k$ avec $x_k \in ker(f)$

Les solutions de Eq s'écrivent donc comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de $f(x) = 0_F$.
$f(x) = 0_F$ est appelée **équation homogène associée à** Eq.

BILAN : L'ensemble des solutions de Eq est donc, soit vide, soit de la forme $x_p + ker(f)$ (on parle d'espace affine)

Complément : si x_1 est solution de $f(x) = b_1$ et si x_2 est solution de $f(x) = b_2$
Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\; f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) = b_1 + \lambda b_2$
et donc $x_1 + \lambda x_2$ est solution de $f(x) = b_1 + \lambda b_2$
On parle de principe de **superposition**.

1 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

1.1 Résolution de l'équation homogène

1.1.1 Théorème

Théorème . *Soit a une fonction continue sur I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.*
Alors les solutions de $(E) \Leftrightarrow y'(x) + a(x)y(x) = 0$ s'écrivent sous la forme :
$y(x) = \alpha exp(A(x))$ ou A est une primitive sur I de $x \mapsto -a(x)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

preuve :

1.1.2 Exemple important : décharge du condensateur

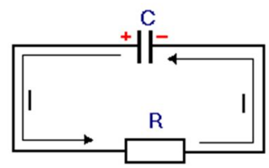

Fig. 4. - Décharge d'un condensateur.

Alors d'un coté $U = Ri$ et d'autre part $i = -C\frac{dU}{dt}$
On a donc $\frac{U}{R} = -C\frac{dU}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = 0$
On pose $\tau = RC$, et alors U est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants :
$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau}U = 0$
dont la solution s'écrit : $U(t) = U(0)exp(\frac{-t}{\tau})$
Représentation graphique :

1.2 Résolution de l'équation avec second membre : méthode de variation de la constante

1.2.1 Cadre

On considère a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $(E) \Leftrightarrow y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.

1.2.2 Résolution de (E)

On suppose que y_0 est une solution de (E_0) NE S'ANNULANT PAS sur I
Alors pour chercher **toutes** les solutions de (E) on pose $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$.
C'est un changement de fonction inconnue, licite car : $\forall x \in I \quad y_0(x) \neq 0$

1.2.3 Problème de Cauchy

Théorème . *(cas particulier du Théorème de Cauchy linéaire)*
Soit a et b deux fonctions continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors le problème de Cauchy :
$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ *admet une unique solution sur I.*

preuve : voir paragraphe précédent

1.2.4 Exemple

Résolution de : $(E) \Leftrightarrow (x+1)y'(x) - xy(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
solution (ln(x) + C1)*exp(x)/(1 + x)

1.3 Propriétés algébriques

Théorème . Structure de l'ensemble des solutions
Soit a et b deux fonctions continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit l'EDL_1 $(E) \Leftrightarrow y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ et l'équation homogène associée $(E_0) \Leftrightarrow y'(x) + a(x)y(x)$.
Alors l'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est un espace vectoriel de dimension 1.
Les solutions de (E) s'écrivent comme la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de (E_0).
Si S_0 est l'ensemble des solutions de (E_0) alors l'ensemble S des solution de (E) s'écrit :
$S = \{y_p\} + S_0 = \{y_p + y_0\ ,\ y_0 \in S_0\}$ avec y_p une solution particulière de (E).

Remarques. *On écrit :*

$$\textit{solution générale} = \textit{solution particulière} + \textit{solution de l'équation homogène}$$

S est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 1 translaté d'une solution particulière (on parle d'espace affine).
Si a et b ne sont pas continues on a que S_0 est un espace vectoriel mais on ne connaît pas la dimension, on peut éventuellement avoir $S_0 = \emptyset$.

preuve : cf préliminaires

Théorème . Principe de superposition
Si y_1 est une solution particulière de $E_1 \Leftrightarrow a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière de $E_2 \Leftrightarrow a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_2(x)$ alors :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $y_1 + \lambda y_2$ est une solution particulière de $E_3 \Leftrightarrow a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x) + \lambda c_2(x)$

preuve : cf préliminaires

2 Equations différentielles linéaires scalaire d'ordre 2

On rappelle que les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Cadre

Définitions. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit α, β, γ et δ quatre fonctions définies sur I. On appelle* **équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2**, *une équation différentielle de la forme :*

$$(E) \Leftrightarrow \alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = \delta(x)$$

d'inconnue une fonction y dérivable sur I.
L'équation différentielle : $(E_0) \Leftrightarrow \alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = 0$
est appelée équation homogène associée à (E) ou équation sans second membre
On dira qu'une fonction y définie sur I est solution de (E) sur I si et seulement si y est deux fois dérivable sur I et vérifie $\forall x \in I\ ,\ \alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = \delta(x)$.

Remarque. *Comme pour les EDL_1 on étudiera : $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$.*

2.2 Résolution théorique

2.2.1 Théorème d'analyse

Théorème . *(cas particulier du Théorème de Cauchy linéaire)*
Soit a, b et c trois fonctions ***continues*** *sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Soit $x_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$.
Alors le problème de Cauchy : $\begin{cases} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$
admet une unique solution sur I

preuve : hors programme

2.2.2 Corollaires algébriques

Théorème . *Soit a, b et c trois fonctions continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Soit l'EDL$_2$ $(E) \Leftrightarrow y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ et l'équation homogène associée $(E_0) \Leftrightarrow y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$.
Alors l'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2.
Les solutions de (E) s'écrivent comme la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de (E_0).
Si S_0 est l'ensemble des solutions de (E_0) alors l'ensemble S des solution de (E) s'écrit :
$S = \{y_p\} + S_0 = \{y_p + y_0\ ,\ y_0 \in S_0\}$ avec y_p une solution particulière de (E).

Remarques. *On écrit : solution générale = solution particulière + solution de l'équation homogène.*
S est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 2 translaté d'une solution particulière (on parle d'espace affine).
Si a, b et c ne sont pas continues on a que S_0 est un espace vectoriel mais on ne connaît pas la dimension, on peut éventuellement avoir $S_0 = \emptyset$.

2.2.3 Propriété

Théorème . Principe de superposition
Si y_1 est une solution particulière de $E_1 \Leftrightarrow a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière de $E_2 \Leftrightarrow a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x) = d_2(x)$ alors : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $y_1 + \lambda y_2$ est une solution particulière de $E_3 \Leftrightarrow a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d_1(x) + \lambda d_2(x)$

2.3 Résolution pratique : cas général

Dans le cas général, on ne sait pas résoudre ...
Dans le cadre du programme, toute résolution doit comporter des indications ...

2.4 Cas particulier important : coefficients constants

2.4.1 Equation différentielle scalaire linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

(Voir cours de première année)

Définition. *On appelle* **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants**, *une équation différentielle de la forme :*

$$E \Leftrightarrow y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
L'équation scalaire d'inconnue r : $r^2 + ar + b = 0$ est appelée ***équation caractéristique*** *de E.*

Remarques. *On résoudra sur $\mathbb{R}$.*

Théorème de résolution : solutions à valeurs complexes

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $E \Leftrightarrow y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.
Si l'équation caractéristique de E admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de E s'écrivent : $y(t) = Aexp(r_1t) + Bexp(r_2t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
Si l'équation caractéristique de E admet une racine double r_0, alors les solutions de E s'écrivent : $y(x) = exp(r_0t)(A + Bt)$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

Théorème de résolution : solutions à valeurs réelles

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $E \Leftrightarrow y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.
Si l'équation caractéristique de E admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de E s'écrivent : $y(t) = \alpha exp(r_1t) + \beta exp(r_2t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Si l'équation caractéristique de E admet une racine réelle double r_0, alors les solutions de E s'écrivent : $y(t) = exp(r_0t)(A + Bt)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Si l'équation caractéristique de E admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\delta$ et $\alpha - i\delta$, alors les solutions de E s'écrivent : $y(x) = exp(\alpha t)(Acos(\delta t) + Bsin(\delta t))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. *On peut écrire $y(t) = exp(\alpha t)(Acos(\delta t) + Bsin(\delta t)) = Mexp(\alpha t)cos(\delta t + \varphi)$ avec $M > 0$ et $\varphi \in]-\pi; \pi]$*

Cas particulier : Si $\omega > 0$ alors les solutions de $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$ s'écrivent $y(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ ou encore $y(t) = Msin(\omega t + \varphi)$ avec $M > 0$ et $\varphi \in]-\pi; \pi]$

Rappel : Si l'équation est de la forme $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$, alors la solution générale s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$

2.4.2 Exemples

Solutions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0 \\ y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = sh(x) \end{cases}$.

2.5 Exemples

Exemple 1 : Résolution sur $]\sqrt{3}, +\infty[$ de : $(E_1) \Leftrightarrow (x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0$

Solutions : $y(x) = a(x^3 + 9x) + b(x^2 + 1)$

Exemple 2 : Solution sur $I =]0; +\infty[$ de $E \Leftrightarrow x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$.

Réponse : $y(x) = \alpha x + \beta x ln(x)$

3 Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce paragraphe on considère f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

3.1 Fonctions coordonnées

Définition. *Pour $x \in I$ on note $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_3(x))$.*
Les fonctions f_i ainsi définie de I dans $\mathbb{R}$ sont appelées fonctions coordonnées de f.

Exemple. *Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x, cos(x^2))$.*
Alors f est composée de deux fonctions coordonnées $x \mapsto x^2 + x$ et $x \mapsto cos(x^2)$.

3.2 Interprétation comme courbe

Si f est suffisamment régulière alors $\Gamma = f(I)$ peut-être vu comme un objet de dimension 1.

Exemple : $\begin{array}{cccc} f & : & [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & (cos(t), sin(t)) \end{array}$

3.3 Continuité (Rappel)

Théorème . *f est continue sur I si et seulement si les applications coordonnées de f sont continues sur I.*

3.4 Dérivabilité

3.4.1 Dérivabilité en un point

Définition. *Soit $a \in I$, alors on dit que :*
f est dérivable en a si et seulement $\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe dans $\mathbb{R}^n$
On note $f'(a)$ cette limite.

Lemme. *f est dérivable en a si et seulement si les applications coordonnées de f sont dérivables en a*

Remarque. *Si f est dérivable en a on note $f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a))$ ou $f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), f_3'(a))$.*
On peut alors écrire $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

3.4.2 Caractérisation par le DL à l'ordre 1

Lemme. *f est dérivable en a si et seulement si $\exists V \in \mathbb{R}^n$, $f(a + h) = f(a) + hV + o(h)$*

Remarque. $V = f'(a)$

3.4.3 Interprétation cinématique

3.4.4 Continuité et dérivabilité sur I

Définitions. *: Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.*
Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I

3.4.5 Lemme

Lemme. *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Remarque. *: La réciproque est évidement fausse.*

3.4.6 Fonctions dérivées

Définition. *Si f est définie sur I et si f est dérivable sur I alors on définit f' comme étant la fonction de I dans E qui à $a \in I$ associe $f'(a)$*
f' est appelée **fonction dérivée de** *f.*

Définition. *Si f est définie sur I et si f est dérivable alors on peut éventuellement dériver f'. La fonction ainsi obtenue (dérivée seconde) est notée f'' ou $f^{(2)}$.*
Par itération on définit, éventuellement, la dérivée $k^{ième}$ par $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$.

3.5 Structure vectorielle, fonctions de classe C^k

Définitions. *On dit qu'une fonction f est de classe C^k sur une partie I de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est k fois dérivable et si sa dérivée $k^{ième}$ est continue sur I. Si f est de classe C^k pour tout k on dit que f est de classe C^∞*

Lemme. *L'ensemble des fonctions de classe C^k sur I, que l'on note, $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.*

Remarque. *Autrement dit, si f et g sont deux fonctions de $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ et si λ est un nombre réel, alors $f + \lambda g$ est une fonction de $C^k(I, \mathbb{R}^n)$.*

3.6 Quelques dérivations particulières

3.6.1 Composée avec une application linéaire

Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$ dérivable au point $a \in I$.
Alors $L \circ f$ est dérivable au point a et : $(L \circ f)'(a) = L\big(f'(a)\big)$

3.6.2 Dérivation d'un produit (Formule de Leibniz)

Soit f une fonction de classe C^n de I dans E et λ une fonction de classe C^n de I dans $\mathbb{R}$. Alors :
$\forall t \in I \ , \ (\lambda f)^{(n)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(k)}(t) f^{(n-k)}(t)$

3.6.3 Bilinéarité

Soient n, p et q dans $\mathbb{N}^*$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}^n$, g une application de I dans $\mathbb{R}^p$ et B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.

On définit l'application $B(f,g)$ par : $B(f,g) : I \longrightarrow \mathbb{R}^q$ par $\forall t \in I \ \ B(f,g)(t) = B\big(f(t), g(t)\big)$

On suppose que f et g sont dérivables au point a de I.

Alors l'application $B(f,g)$ est dérivable au point a et : $\big(B(f,g)\big)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big)$

3.6.4 Multilinéarité

On suppose que $\forall k \in [\![1;p]\!]$, f_k est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^{n_k}$.
On suppose que B est une application multi-linéaire de $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p}$ dans $\mathbb{R}^q$.
Alors l'application $g = B(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable sur I et
$g' = \sum\limits_{k=1}^{p} B(f_1, \ldots, f_{k-1}, f'_k, f_{k+1}, \ldots, f_p)$

3.6.5 Dérivation d'un produit scalaire

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni d'un produit scalaire noté $<\ ,\ >$. Soit f et g deux fonctions de classe C^n de I dans E. Alors:
$\forall t \in I\ ,\ \frac{d^n}{dt^n}(< f(t), g(t) >) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} < f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t) >$

3.6.6 Dérivation d'un produit vectoriel

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $\wedge$ le produit vectoriel. Soit f et g deux fonctions de classe C^n de I dans $\mathbb{R}^3$. Alors :
$\forall t \in I\ ,\ (f \wedge g)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) \wedge g^{(n-k)}(t)$

3.6.7 Dérivation d'une norme

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni d'un produit scalaire noté $<\ ,\ >$ et de $||\ ||$ la norme euclidienne associée. Soit f une fonction de classe C^1 de I dans E. Alors, $\forall t \in I$, si $||f(t)|| \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\,||f(t)|| = \frac{< f(t), f'(t) >}{||f(t)||}$$

3.6.8 Dérivation d'un déterminant

Dans $\mathbb{R}^2$
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base B.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\forall t \in I\ ,\ \frac{d}{dt} det_B(\vec{u}(t), \vec{v}(t)) = det_B(\frac{d\vec{u}}{dt}(t), \vec{v}(t)) + det_B(\vec{u}(t), \frac{d\vec{v}}{dt}(t))$$

Dans $\mathbb{R}^3$
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base B.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois fonctions de I dans $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\forall t \in I\ ,\ \frac{d}{dt} det_B(\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t)) = det_B(\frac{d\vec{u}}{dt}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t)) + det_B(\vec{u}(t), \frac{d\vec{v}}{dt}(t), \vec{w}(t)) + det_B(\vec{u}(t), \vec{v}(t), \frac{d\vec{w}}{dt}(t))$$

3.6.9 Dérivation d'une composée

Soit une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dérivable. Soit par ailleurs une application $\varphi : J \longrightarrow I$ dérivable (J est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$). Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$

4 Application aux systèmes différentiels à coefficients constants : Exemples

4.1 Exemple

4.2 Système différentiel à coefficients constants

Définitions. *Un système différentiel linéaire à coefficients constants est un système s'écrivant :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases} \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

avec $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ *et* $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *ou* X *est une fonction inconnue de* $\mathbb{R}$ *dans* $M_{n,1}(K)$.
On dit que X *est solution de* (S) *sur* I *(une partie de* $\mathbb{R}$*) si et seulement si* $\forall t \in I\ ,\ X'(t) = AX(t)$

4.3 Résolution dans le cas A diagonalisable

Soit A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Soit $B = (e_1, .., e_n)$ une base de vecteurs propres de A telle que : $\forall k \in \{1..n\} \quad Ae_k = \lambda_k e_k$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base B. Alors $A = PDP^{-1}$.
Pour résoudre $(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$ On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$.

Alors : $(S) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t) \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 exp(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ \alpha_n exp(\lambda_n t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow X(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k exp(\lambda_k t) e_k$

4.4 Exemple

Résolution de $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$

Sommaire

1 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 **2**
- 1.1 Résolution de l'équation homogène . . . 2
  - 1.1.1 Théorème . . . 2
  - 1.1.2 Exemple important : décharge du condensateur . . . 2
- 1.2 Résolution de l'équation avec second membre : méthode de variation de la constante . . . 2
  - 1.2.1 Cadre . . . 2
  - 1.2.2 Résolution de (E) . . . 2
  - 1.2.3 Problème de Cauchy . . . 2
  - 1.2.4 Exemple . . . 2
- 1.3 Propriétés algébriques . . . 3

2 Equations différentielles linéaires scalaire d'ordre 2 **3**
- 2.1 Cadre . . . 3
- 2.2 Résolution théorique . . . 3
  - 2.2.1 Théorème d'analyse . . . 3
  - 2.2.2 Corollaires algébriques . . . 4
  - 2.2.3 Propriété . . . 4
- 2.3 Résolution pratique : cas général . . . 4
- 2.4 Cas particulier important : coefficients constants . . . 4
  - 2.4.1 Equation différentielle scalaire linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants (Voir cours de première année) . . . 4
  - 2.4.2 Exemples . . . 5
- 2.5 Exemples . . . 5

3 Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ **6**
- 3.1 Fonctions coordonnées . . . 6
- 3.2 Interprétation comme courbe . . . 6
- 3.3 Continuité (Rappel) . . . 6
- 3.4 Dérivabilité . . . 6
  - 3.4.1 Dérivabilité en un point . . . 6
  - 3.4.2 Caractérisation par le DL à l'ordre 1 . . . 6
  - 3.4.3 Interprétation cinématique . . . 6
  - 3.4.4 Continuité et dérivabilité sur I . . . 7
  - 3.4.5 Lemme . . . 7
  - 3.4.6 Fonctions dérivées . . . 7
- 3.5 Structure vectorielle, fonctions de classe C^k . . . 7
- 3.6 Quelques dérivations particulières . . . 7
  - 3.6.1 Composée avec une application linéaire . . . 7
  - 3.6.2 Dérivation d'un produit (Formule de Leibniz) . . . 7
  - 3.6.3 Bilinéarité . . . 7
  - 3.6.4 Multilinéarité . . . 7
  - 3.6.5 Dérivation d'un produit scalaire . . . 8
  - 3.6.6 Dérivation d'un produit vectoriel . . . 8
  - 3.6.7 Dérivation d'une norme . . . 8
  - 3.6.8 Dérivation d'un déterminant . . . 8
  - 3.6.9 Dérivation d'une composée . . . 8

4 Application aux systèmes différentiels à coefficients constants : Exemples **8**
- 4.1 Exemple . . . 8
- 4.2 Système différentiel à coefficients constants . . . 8
- 4.3 Résolution dans le cas A diagonalisable . . . 9
- 4.4 Exemple . . . 9