

Chapitre 18 : Théorèmes de convergence dominée ; intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, les fonctions sont de la variable réelle et à valeurs dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1 Suites et séries de fonctions intégrables

1.1 Théorème de convergence dominée

1.1.1 Théorème

Théorème . Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n : I \rightarrow K)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I . Alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} i) (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers une fonction notée } f : I \rightarrow K \text{ continue par morceaux sur } I \\ ii) \text{ il existe une fonction } \varphi : I \rightarrow K \text{ telle que } \varphi \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t) \\ \text{les fonctions } f_n \text{ et la fonction } f \text{ sont intégrables sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$$

preuve : HP théorème de convergence dominée de Lebesgue, utilise la théorie de la mesure de Lebesgue ...

Remarques. Autre écriture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$

L'hypothèse ii) s'appelle **hypothèse de domination**

1.1.2 Exemple

1.1.3 Contre-exemple

1.1.4 Autre exemple

1.2 Théorème d'intégration terme à terme

1.2.1 Théorème

Théorème . Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans K .

$$\text{Si } \begin{cases} i) \text{ les } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } I \\ ii) \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une fonction continue par morceaux sur } I \\ iii) \sum \int_I |f_n(t)| dt \text{ est convergente} \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est intégrable sur } I \\ \sum \int_I f_n \text{ est convergente} \\ \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt \end{cases}$$

preuve : HP

Remarque. La troisième hypothèse est la plus importante.

1.2.2 Exemple

1.2.3 Contre-exemple

1.2.4 Utilisation du théorème de convergence dominée pour les sommes partielles