

# Chapitre 18 : Théorèmes de convergence dominée ; intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, les fonctions sont de la variable réelle et à valeurs dans  $K$  avec  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Suites et séries de fonctions intégrables

### 1.1 Théorème de convergence dominée

#### 1.1.1 Théorème

**Théorème .** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n : I \rightarrow K)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues par morceaux sur  $I$ . Alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} i) (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers une fonction notée } f : I \rightarrow K \text{ continue par morceaux sur } I \\ ii) \text{ il existe une fonction } \varphi : I \rightarrow K \text{ telle que } \varphi \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t) \\ \text{les fonctions } f_n \text{ et la fonction } f \text{ sont intégrables sur } I \\ \int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt \end{cases}$$

preuve : HP théorème de convergence dominée de Lebesgue, utilise la théorie de la mesure de Lebesgue ...

**Remarques.** Autre écriture :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$

L'hypothèse ii) s'appelle **hypothèse de domination**

#### 1.1.2 Exemple

#### 1.1.3 Contre-exemple

#### 1.1.4 Autre exemple

## 1.2 Théorème d'intégration terme à terme

### 1.2.1 Théorème

**Théorème .** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $I$  dans  $K$ .

$$\begin{aligned} & \text{Si } \begin{cases} i) \text{ les } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } I \\ ii) \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une fonction continue par morceaux sur } I \\ iii) \sum_I |f_n(t)| dt \text{ est convergente} \end{cases} \\ & \text{alors } \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est intégrable sur } I \\ \sum_I f_n \text{ est convergente} \\ \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt \end{cases} \end{aligned}$$

preuve : HP

**Remarque.** La troisième hypothèse est la plus importante.

#### 1.2.2 Exemple

#### 1.2.3 Contre-exemple

#### 1.2.4 Utilisation du théorème de convergence dominée pour les sommes partielles