PSI* 2025-2026

A rendre le lundi 23 février 2026

Devoir à la maison n°10 de Mathématiques

Entraînement au concours blanc

Remarque : DM facultatif, donnez la priorité aux révisions de cours et aux exercices corrigés

---

Contenu du DM :

- Niveau 1-2 : deux exercices d'EPITA 2025 : MP-MPI-PC-PSI

- Niveau 2-3 : ccINP PSI 2023, Problème 2 : puissances et limites de suite de matrices

- Niveau 2,3,4,5,6 : X-ENS PC 2025

EPITA 2025 : Exercice 1 et 3

Exercice 3. Racines carrées de matricess.

Dans cet exercice $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel non nul, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

20. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.

Dans la suite, A et M sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent : $AM = MA$.
On suppose aussi que A admet n valeurs propres distinctes.

21. Démontrer que toute colonne propre de A est aussi colonne propre de M.

22. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}MP$ sont toutes les deux diagonales.

23. On considère à nouveau la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

    Déterminer le nombre de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = A$ selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la dernière question on suppose que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

24. Démontrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $M^2 = B$.

Exercice 1. Etude d'une équation fonctionnelle.

Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, λ est un réel tel que $|\lambda| < 1$ et a est un réel quelconque.

On pose, lorsque cela a un sens, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$.

1. On suppose dans cette question que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose dans cette question que f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ notée ℓ.

   (a) Démontrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer la limite de F en $+\infty$ en fonction de ℓ.

Dans la suite, on note $\mathcal{L}$ l'ensemble des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des applications f pour lesquelles il existe une constante K telle que : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

On suppose désormais que f est un élément de $\mathcal{L}$.

3. Prouver que $\mathcal{L}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq A|x| + B$.

5. En déduire que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

6. (a) Démontrer que la fonction F appartient à $\mathcal{L}$ et vérifie : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x + a) = f(x)$.

   (b) Démontrer que F est l'unique élément $G \in \mathcal{L}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ G(x) - \lambda G(x + a) = f(x)$.

7. On suppose que f est la fonction constante définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$.
   Démontrer que $f \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F correspondante.

8. On suppose que f est la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x)$.
   Démontrer que $f \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F correspondante.

ccINP PSI 2023 : Problème 2

Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avec $p = 1$ (matrices colonnes) ou $p = n$ (matrices carrées). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note alors $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ ou plus simplement $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme notée $\|.\|$ indifféremment des valeurs de n et p. En particulier, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;
2. la suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
3. pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!]$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a, b)$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$M(a, b) = bI_n + aM(1, 0).$$

Q18. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que dans ce cas $M(a, b)$ est diagonalisable.

Q19. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ et déterminer la valeur propre associée à V.

Q20. Montrer que $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))\,(X+1)^{n-1}$.

Q21. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a, b)$ ainsi que leurs multiplicités.

Q22. On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par $Q_{a,b}(X) = (X - (b-a))\,(X - (b + (n-1)a))$. Montrer que $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a, b)$ et en déduire que $M(a, b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).

Q23. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a, b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a, b)$ et de I_n.

Q24. Supposons que $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $\left(M(a, b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On note sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u. On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

On suppose (sauf à la **Q29**) que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Q25. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$ et en déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_1)$.

On suppose qu'il existe $i \in [\![1; n-1]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1; i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_j) = 0$.

Q26. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1;i]\!]}$ tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

Q27. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$. En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.

Q28. Montrer alors que $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0$.

Q29. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est une matrice à **diagonale strictement dominante**. On admet que dans ce cas A est inversible.

On définit ensuite $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$,

- si $i \geq j$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ et $f_{i,j} = 0$;
- si $i < j$, $m_{i,j} = 0$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$.

Ainsi, $A = M - F$ où F est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de $-A$ et où M est la partie triangulaire inférieure de A.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers X.

Q30. Justifier que M est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose $B = M^{-1}F$. On définit par récurrence une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y.$$

Q31. Montrer que $X = BX + M^{-1}Y$.

Soit λ une valeur propre quelconque de la matrice B. On note $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre.

Par convention, si $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{0} u_j = 0$.

Q32. Montrer que $FV = \lambda MV$. En déduire que :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \lambda a_{i,i}v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j\right).$$

Q33. Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|v_{i_0}| = \max\limits_{j\in[\![1;n]\!]} |v_j|$ et $v_{i_0} \neq 0$. En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right).$$

Q34. En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0$.

Q35. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

et conclure.

X-ENS, PC 2025

Le but de ce sujet est d'étudier les perturbations de rang 1 de matrices.

Notations

Dans l'ensemble du sujet, m, n désignent des entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de taille $n \times n$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est notée A^T.

Les coefficients d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sont notés $x_1, \cdots, x_n$. Dans ce sujet, les vecteurs sont notés en **gras**, et sont identifiés à des matrices colonnes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par exemple

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{de transposée} \quad \mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\mathbf{x}^T\mathbf{y} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est identifiée au nombre réel $\sum_{i=1}^n x_i y_i$; l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire et de sa norme usuels, notés respectivement

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \qquad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Les deux premières parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Les parties 4 et 5 sont indépendantes entre elles, et s'appuient sur des résultats des parties précédentes.

À tout moment il est possible d'admettre le résultat d'une question et de l'utiliser ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Première partie

1. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. On pose $M = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Monter que M est une matrice carrée de taille $n \times n$, de rang 1.

2. Calculer avec justification le rang de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Réciproquement, soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

4. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Montrer que $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}, \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{y}.$$

5. Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

(a) Montrer que $\mathrm{Tr}(K) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

(b) Montrer que $K^2 = \mathrm{Tr}(K)K$.

(c) En déduire que K est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(K) \neq 0$.

6. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang 1 si et seulement si il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\mathbf{y}\| = 1$ tels que $P = \mathbf{y}\mathbf{y}^T$.

Deuxième partie

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

7. Calculer le produit matriciel par blocs

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que

$$\det\left(\mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right) = 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

9. Montrer plus généralement que

$$\det\left(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right) = \det(A)\left(1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle\right).$$

10. Montrer que $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible si et seulement si $\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq -1$.

11. On suppose que $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible. Montrer que

$$\left(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}.$$

12. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\det(C) = 0$. A-t-on toujours $\det(C + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 0$? Justifiez votre réponse.

Troisième partie

On s'intéresse maintenant au cas où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$. On pose

$$B = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

13. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $M = N$ si et seulement si $M\mathbf{v}_k = N\mathbf{v}_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

14. Soit $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathbb{I}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T.$$

15. On s'intéresse maintenant à la matrice symétrique A. En vertu du théorème spectral, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A, et $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres correspondante.

(a) Montrer que

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on a

$$(x\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T.$$

16. Soit λ une valeur propre de A de multiplicité $m \geqslant 2$. On pose $E = \mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbb{I}_n)$.

(a) Montrer que $\dim\left(E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp\right) \geqslant m - 1$.

(b) En déduire que λ est une valeur propre de B de multiplicité au moins $m - 1$.

17. On note $\chi_A(x) = \det(x\mathbb{I}_n - A)$ le polynôme caractéristique de A, et $\chi_B(x) = \det(x\mathbb{I}_n - B)$ celui de B. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on a

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k} \right).$$

18. Soit $J = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle \neq 0\}$ l'ensemble des indices k tels que $\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle \neq 0$.

(a) Montrer que $J \neq \varnothing$.

(b) Soit $\ell \notin J$. Montrer que λ_ℓ est une valeur propre de B.

(c) On suppose que $J = \{j\}$ pour un $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que les valeurs propres de B sont

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n).$$

19. On suppose dans cette question que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, et que $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k}.$$

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, et calculer sa dérivée $f'(x)$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans chaque intervalle $]\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}[$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, et dans $]\lambda_n, +\infty[$.

(c) On note $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de B. Montrer que

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots < \lambda_n < \mu_n.$$

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\chi_A(x) = \det(x\mathbb{I}_n - A)$. On considère une base orthonormée $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ quelconque. Soit $\mathbf{U}$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'ensemble fini $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, et qui suit la loi uniforme sur cet ensemble. On note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

On considère la variable aléatoire B, à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, définie par

$$B = A + \mathbf{U}\mathbf{U}^T.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\chi_B(x) = \det(x\mathbb{I}_n - B)$, qui est une variable aléatoire à valeurs réelles.

20. Montrer que pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{E}\left[\langle \mathbf{U}, \mathbf{w} \rangle^2\right] = \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|^2$.

21. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Montrer que la variable aléatoire $\chi_B(x)$ a une espérance finie, et que, en notant χ_A' la dérivée du polynôme χ_A, on a

$$\mathbb{E}\left[\chi_B(x)\right] = \chi_A(x) - \frac{1}{n}\chi_A'(x).$$

22. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\chi_B(\lambda_k)\right] = -\frac{1}{n}\chi_A'(\lambda_k).$$

23. Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left[\chi_B(x)\right] \neq 0$.

Cinquième partie

Comme dans la troisième partie, on suppose que

$$B = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ celles de B. On admet que

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n.$$

On suppose de plus qu'il existe un entier $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tel que les valeurs propres de A vérifient

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m < \lambda_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \lambda_{m+1}[$.

24. Justifier que $(A - \varepsilon \mathbb{I}_n)$ est inversible.

On suppose dans la suite que $\langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle < -1$.

25. Montrer que $(B - \varepsilon \mathbb{I}_n)$ est inversible.

26. Montrer que $\operatorname{Tr}\left((B - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}\right) > \operatorname{Tr}\left((A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}\right)$.

27. Montrer que $\mu_m > \varepsilon$.