Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°9

EXERCICE 1

• On a : $A \cap B \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ De même : $A \cap B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$

On a alors : $\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$

• On a : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$

Comme $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\mathbb{P}(A \cup B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

De plus $0 \leq \mathbb{P}(A \cup B)$ est évident.

On a alors : $\begin{cases} 0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \end{cases} \Rightarrow max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - p(A \cup B)) \leq \mathbb{P}(A \cap B)$

• Bilan : $\boxed{max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))}$

EXERCICE 2

1°) a) Si φ est une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ alors $\varphi([\![1, n]\!]) = [\![1, p]\!]$ et donc $n \leq p$

Il n'y a donc pas de bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ si $p > n$

Bilan : $\boxed{p > n \Rightarrow S(n, p) = 0}$

1°) b) Ci-dessous φ désigne une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$

• Si $p = 1$ alors il n'y a qu'une image possible pour un élément de $[\![1, n]\!]$ donc φ est la fonction constante égale à 1 sur $[\![1, n]\!]$ et donc $S(n, 1) = 1$

• Si $p = 2$

Pour commencer, il y a : 2^n applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$.

Presque toutes sont surjectives, sauf celle constante égale à 1 et celle constante égale à 2. Car une application qui n'est pas constante prend deux valeurs, donc toutes les valeurs de $[\![1, 2]\!]$

On ainsi : $S(n, 2) = 2^n - 2$ (on remarque que si $n = 1$ alors $S(n, 2) = S(1, 2) = 0$, on retrouve le a))

• Si $p = n$, alors comme $card([\![1, n]\!]) = card([\![1, p]\!])$, une surjection est une bijection et à l'aide du cours, on en déduit : $S(n, n) = n!$

• Résumé : $\boxed{\begin{cases} S(n, 1) = 1 \\ S(n, 2) = 2^n - 2 \\ S(n, n) = n! \end{cases}}$

1°) c) Si φ est une surjection de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ alors on a :

$\sum\limits_{k=1}^{n} card(f^{-1}(\{k\}) = n + 1$ avec $card(f^{-1}(\{k\}) \geq 1$

donc $\sum\limits_{k=1}^{n} [card(f^{-1}(\{k\}) - 1] = 1$ avec $card(f^{-1}(\{k\}) - 1 \geq 0$ et $card(f^{-1}(\{k\}) - 1 \in \mathbb{N}$

On a donc $\exists k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $card(f^{-1}(\{k_0\}) - 1 = 1 \Rightarrow card(f^{-1}(\{k_0\}) = 2$

Pour choisir une surjection φ de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ il faut choisir :

\# l'élément de $[\![1,n]\!]$ qui aura 2 antécédents (n choix)

\# le couple d'éléments de $[\![1,n+1]\!]$ (n,m) qui sera envoyé sur cette élément ($\binom{n+1}{2}$ choix)

\# La restriction de φ à $[\![1,n]\!]\backslash\{n,m\}$ qui est une bijection vers $[\![1,n]\!]\backslash\{k_0\}$ ($(n-2)!$ possibilités).

Donc : $S(n+1,n) = n\binom{n+1}{2}(n-2)! = n\frac{(n+1)!}{2!(n-2)!}(n-2)! = n(n+1)!$

On a donc $\boxed{S(n+1,n) = n(n+1)!}$

2°) Soit φ est une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.
Alors, il y a p possibilités pour la valeur de $\varphi(n)$
La restriction de φ_1 de φ à $[\![1,n-1]\!]$ atteint donc tout les éléments de $[\![1,p]\!]\backslash\{\varphi(n)\}$
On a alors 2 cas :

Cas 1 : $\varphi(n) \in \varphi_1([\![1,n-1]\!])$
Alors φ_1 est une surjection de $[\![1,n-1]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$, il y a donc $S(n-1,p)$ possibilités.

Cas 2 : $\varphi(n) \notin \varphi_1([\![1,n-1]\!])$
Alors φ_1 est une surjection de $[\![1,n-1]\!]$ vers $[\![1,p]\!]\backslash\{\varphi(n)\}$, il y a donc $S(n-1,p-1)$ possibilités.

On a donc : $\boxed{S(n,p) = p\big(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)\big)}$

3°) a)

```
def S(n,p):
    if p>n:
        return 0
    if p==1:
        return 1
    if p==2:
        return 2**n-2
    return p*(S(n-1,p)+S(n-1,p-1))
```

3°) b) • Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $S(n,p) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$

• Initialisation pour $n = 1$
On veut montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $S(1,p) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k$

Si $p = 1$ alors $S(1,1) = 1$ et $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k = (-1)^0 1 = 1$
La relation est vérifié.

Si $p > 1$
On remarque que : $\binom{p}{k}k = \frac{p!}{k!(p-k)!}k = \frac{p(p-1)!}{(k-1)!((p-1)-(k-1))!} = p\binom{p-1}{k-1}$

On a donc : $S(1,p) = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k-1} = p\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p-1}{k-1} = p\sum_{k'=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k'}\binom{p-1}{k'} = p(1-1)^{p-1} = 0$

Finalement la propriété est bien vérifiée si $n = 1$

• Hérédité
On suppose la propriété vraie au rang $n-1$ et on va la démontrer au rang $n>1$.

Si $p=1$ alors la formule se vérifie comme dans le cas $n=1$ de l'initialisation.

Si $p>1$, on peut alors utiliser le 2°) (puisque $n>1$) et on a :
$S(n,p)=p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big)$ donc avec l'hypothèse au rang $n-1$:

$$\begin{aligned}
&S(n,p)\\
&=p\Big(\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^{n-1}+\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\binom{p-1}{k}k^{n-1}\Big)\\
&=p\Big(\underbrace{p^{n-1}}_{\text{terme pour }k=p}+\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}[\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}]k^{n-1}\Big)\quad \text{triangle de Pascal}\\
&=p\Big(\underbrace{p^{n-1}}_{\text{terme pour }k=p}+\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}\binom{p-1}{k-1}k^{n-1}\Big)\\
&=p^n+\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k-1}k^{n-1}
\end{aligned}$$

On réutilise la formule montrer dans l'initialisation :
$S(n,p)=p^n+\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n\ \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$
et on a bien la relation au rang n.

• Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \forall p\in\mathbb{N}^*\ ,\ S(n,p)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n}$

EXERCICE 3

• Notons B_k l'événement une boule blanche est tirée lors du k ième tirage (indépendamment du fait que ce soit A ou B qui tire la boule) et V_k l'événement une deuxième boule blanche consécutive est tirée lors du k ième tirage et ce, pour la première fois.
On remarque que : $\overline{B_k}$ est l'événement : tirer une boule rouge au k ième tirage.
On pose $u_k=P(V_k)$
On notera aussi G l'événement A gagne.

• Par indépendance et équiprobabilité des tirages on a : $P(B_k)=q$ avec $q=\frac{2}{3}$.

• Clairement $u_1=P(V_1)=0$ car deux boules ne peuvent pas être tirées en un seul tirage.

• On a aussi : $V_2=B_1\cap B_2$, donc par indépendance : $u_2=P(V_2)=P(B_1)P(B_2)=q^2$

• Pour $k\geq 3$, alors, par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(B_1\cap B_2, B_1\cap\overline{B_2},\overline{B_1})$:

$$u_k=P(V_k)=\underbrace{P(V_k|B_1\cap B_2)}_{=0}P(B_1\cap B_2)+\underbrace{P(V_k|B_1\cap\overline{B_2})}_{u_{k-2}}\underbrace{P(B_1\cap\overline{B_2})}_{q(1-q)}+\underbrace{P(V_k|\overline{B_1})}_{u_{k-1}}\underbrace{P(\overline{B_1})}_{1-q}$$

En effet on a :
* $P(V_k|B_1 \cap B_2) = 0$, en effet $B_1 \cap B_2$ étant réalisé on a V_2 réalisé donc V_k ne l'est pas puisque $k > 2$
* $P(V_k|B_1 \cap \overline{B_2}) = P(V_{k-2}) = u_{k-2}$ car c'est comme si les deux premiers tirages ne comptait pas
* $P(B_1 \cap \overline{B_2}) = q(1-q)$ par indépendance des deux événements.
* $P(V_k|\overline{B_1}) = P(V_{k-1}) = u_{k-1}$, car c'est comme si le premier tirage n'avait pas compté.
* $P(\overline{B_1}) = 1 - q$

On a donc : $\forall k \geq 3 \ , \ u_k = (1-q)u_{k-1} + q(1-q)u_{k-2}$

• $(u_k)_{k\geq 1}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène, d'équation caractéristique : $E_c \Leftrightarrow R^2 - (1-q)R - q(1-q) = 0$
Comme $q = \frac{2}{3}$ alors : $E_c \Leftrightarrow R^2 - \frac{1}{3}R - \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$ ou $r = \frac{-1}{3}$

On a alors, d'après le cours : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ u_n = a\big(\frac{2}{3}\big)^{n-1} + b\big(\frac{-1}{3}\big)^{n-1}$

Avec les conditions initiales : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = \frac{-4}{9} \end{cases}$

• Donc $u_n = \big(\frac{2}{3}\big)^{n+1} - 4\big(\frac{-1}{3}\big)^{n+1}$

• Par somme des termes d'une suite géométrique : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_k = \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 4\frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

On a alors que la partie ne se termine pas est de probabilité nulle.

• Ensuite : $G = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} V_{2n+1}$ donc, par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\big(\tfrac{2}{3}\big)^{2n+1+1} - 4\big(\tfrac{-1}{3}\big)^{2n+1+1}\Big] \text{ par somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\big(\tfrac{4}{9}\big)^{n+1} - 4\big(\tfrac{1}{9}\big)^{n+1}\Big] = \frac{16}{81}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - \frac{4}{81}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{16}{5\times 9} - \frac{1}{2\times 9} = \frac{32-5}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité que } A \text{ gagne est de } \frac{3}{10}}$

Exercice 4

On note M l'événement : la personne est malade
On note T l'événement : le test est positif
On traduit les données de l'énoncé par : $P(M) = \frac{3}{100}$, $P(T|M) = \frac{95}{100}$ et $P(T|\overline{M}) = \frac{10}{100}$

1°) On cherche $P(M|T)$
Par la formule de Bayes on a : $P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$
On applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événement $(M, \overline{M})$ ce qui donne :
$P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M}) = P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})(1 - P(M))$
On a donc $P(T) = \frac{95}{100}\frac{3}{100} + \frac{10}{100}\frac{97}{100} = \frac{285+970}{10000} = \frac{1255}{10000}$
Reporté dans la formule de Bayes ci-dessus : $P(M|T) = \frac{\frac{95}{100}\frac{3}{100}}{\frac{1255}{10000}} = \frac{285}{1255} = \frac{57}{251}$

$\boxed{\text{La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif probabilité est de } \frac{57}{251} \approx 0,227}$

2°) On cherche maintenant $P(\overline{M}|T)$
Comme $A \mapsto P(A|T)$ est une probabilité on a : $P(\overline{M}|T) = 1 - P(M|T) = \frac{194}{251}$

$\boxed{\text{La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est de } \frac{194}{251} \approx 0,773}$

3°) On cherche $P(M|\overline{T})$
Par la formule de Bayes on a : $P(M|\overline{T}) = \frac{P(\overline{T}|M)P(M)}{P(\overline{T})} = \frac{(1-P(T|M))P(M)}{1-P(T)}$
Donc $P(M|\overline{T}) = \frac{\frac{5}{100}\frac{3}{100}}{\frac{8745}{10000}} = \frac{15}{8745} = \frac{1}{583}$

$\boxed{\text{La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est de } \frac{1}{583} \approx 0,00172}$

4°) On cherche $P(\overline{M}|\overline{T})$
Comme au 2°) : $P(\overline{M}|\overline{T}) = 1 - P(M|\overline{T})$, donc $P(\overline{M}|\overline{T}) = \frac{582}{583}$

$\boxed{\text{La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est de } \frac{582}{583} \approx 0,999}$

Exercice 5 : Oral ccINP 2024 et 2025

1) A inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(0) = (-1)^n det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

Donc : $\boxed{A \text{ inversible} \Leftrightarrow 0 \notin sp(A)}$

2) Si on note $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, alors les colonnes $n+1$, $2n$ de B engendre un sous espace vectoriel $F \subset vect(e_1, \ldots, e_n)$ et les colonnes $n+1$, n de B engendre le sous espace vectoriel $G = vect(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$
On a alors $Im(B) = F \oplus G$ et donc $rg(B) = dim(F) + dim(G) = rg(A) + n$

On a donc : $\boxed{rg(B) = rg(A) + n}$

3) $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_{n+k} \longleftarrow C_{n+k} + XC_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$
$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & X^2I_n - A \\ -I_n & 0_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_{n+k} \longleftrightarrow C_{n+k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$
$\chi_B(X) = (-1)^n \begin{vmatrix} X^2I_n - A & XI_n \\ 0_n & -I_n \end{vmatrix} = (-1)^n(-1)^n\chi_A(X^2)$ par blocs puisque $det(-I_n) = (-1)^n$

On a donc : $\boxed{\chi_B(X) = \chi_A(X^2)}$

4) $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(x^2) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{3)} \chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in sp(B)$

On a bien : $\boxed{x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow x \in sp(B)}$

5) Si A est inversible avec n valeurs propres distinctes, on sait alors que A est diagonalisable et qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (R\backslash\{0\})^n$ avec les λ_i distincts deux à deux tel que A soit semblable à $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
On a ainsi que le polynôme caractéristique de A s'écrit : $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$
Comme on est dans $\mathbb{C}$, on peut choisir, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_k^2 = \lambda_k$
Avec la relation du 3) on obtient :
$\chi_B(X) = \chi_A(X^2) = \prod_{k=1}^{n}(X^2 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n}(X^2 - \mu_k^2) = \prod_{k=1}^{n}(X - \mu_k)(X + \mu_k)$

Comme μ_k est non nul (car $\lambda_k \neq 0$) alors $\mu_k \neq -\mu_k$ et comme les λ_k sont distincts deux à deux alors finalement $\chi_B(X)$ est scindé simple donc, d'après le cours : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

Remarque : autre méthode, avec les mêmes notations, plus lourde mais qui permet de trouver une base diagonalisant B
On a il existe une base $B_A = (X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall k \in [\![1, k]\!]$, $AX_k = \lambda_k X_k$ et $\lambda_k \neq 0$

On pose alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k^+ = \begin{pmatrix} \mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$ et $Y_k^- = \begin{pmatrix} -\mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$
Alors $BY_k^+ = \begin{pmatrix} AX_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k X_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_k^2 X_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \mu_k \begin{pmatrix} \mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$

On a donc : $BY_k^+ = \mu_k BY_k^+$ et de même $BY_k^- = -\mu_k BY_k^+$
Posons $B_B = (Y_1^+, \ldots, Y_n^+, Y_1^-, \ldots, Y_n^-)$
B_B est alors une famille de vecteurs propres de $\mathbb{R}^{2n}$

Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que : $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k Y_k^+ b_k Y_k^-) = 0$
On a alors, en regardant par blocs : $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - b_k)\mu_k X_k = 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) X_k = 0$
Comme B_A est une base, on a $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\begin{cases} (a_k - b_k)\mu_k = 0 \\ a_k + b_k = 0 \end{cases}$ et comme $\mu_k \neq 0$:
$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\begin{cases} a_k - b_k = 0 \\ a_k + b_k = 0 \end{cases}$
On en déduit : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = b_k = 0$ et donc B_B libre.
Comme on a le bon nombre de vecteurs alors B_B est une base de $\mathbb{R}^{2n}$

On a une base formée de vecteurs propres de B donc : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 6 : Oral ccINP 2025

1) Puisque f est dérivable et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = f(\frac{3}{16x})$, alors f' est dérivable et donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
En dérivant le relation sur $\mathbb{R}^*$ alors : $f''(x) = \frac{-3}{16x^2} f'(\frac{3}{16x})$
Mais en reprenant la relation initiale : $f'(\frac{3}{16x}) = f(\frac{3}{16\frac{3}{16x}}) = f(x)$
On a donc $f''(x) = \frac{-3}{16x^2} f(x)$

$$\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbb{R}^* \text{ de } (E) \Leftrightarrow 16x^2 f''(x) + 3f(x) = 0}$$

2) • On va commencer par chercher les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :
$x \mapsto x^\alpha$ solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+$, $16x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 3x^\alpha = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+$, $\big(16\alpha(\alpha-1) + 3\big)x^\alpha = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+$, $16\alpha(\alpha-1) + 3 = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+$, $16\alpha^2 - 16\alpha + 3 = 0$ $\quad \Delta = 16^2 - 4.16.3 = 4.16 = 64 = 8^2$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = \frac{16-8}{32}$ ou $\alpha = \frac{16+8}{32}$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = \frac{1}{4}$ ou $\alpha = \frac{3}{4}$

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

Comme $(x \mapsto x^{1/4}, x \mapsto x^{3/4})$ est une famille libre de solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ alors :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ s'écrivent : } x \mapsto ax^{1/4} + bx^{3/4} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2}$$

3) Grâce au 1) on cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ parmi les solutions de (E).
Si $\forall x > 0$, $f(x) = ax^{1/4} + bx^{3/4}$ vérifie : $f'(x) = f(\frac{3}{16x})$ alors :
$a\frac{1}{4}x^{-3/4} + b\frac{3}{4}x^{-1/4} = a(\frac{3}{16})^{1/4}x^{-1/4} + b(\frac{3}{16})^{3/4}x^{-3/4}$
Comme $(x \mapsto x^{-1/4}, x \mapsto x^{-3/4})$ est libre, alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a = b(\frac{3}{16})^{3/4} \\ \frac{3}{4}b = a(\frac{3}{16})^{1/4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b(\frac{3}{16})^{3/4} \\ \frac{3}{4}b = b4(\frac{3}{16})^{3/4}(\frac{3}{16})^{1/4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b(\frac{3}{16})^{3/4} \\ \frac{3}{4}b = \frac{3}{4}b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 4b(\frac{3}{16})^{3/4}$$

$$\Leftrightarrow a = b\frac{3^{3/4}}{2}$$

Finalement les solutions du problème s'écrivent sur $\mathbb{R}_+^*$: $\boxed{x \mapsto b\left(\frac{3^{3/4}}{2}x^{1/4} + x^{3/4}\right)}$

4) Si on veut les solutions sur $\mathbb{R}$, alors il faut qu'elle soit dérivable en 0, donc dérivable à droite en 0.
Si f est solution du problème sur $\mathbb{R}$ alors $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x > 0$, $f(x) = b\Big(\frac{3^{3/4}}{2}x^{1/4} + x^{3/4}$
On remarque alors que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et donc $f(0) = 0$ car f est continue en 0.
On a alors pour $x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = b\left(\frac{3^{3/4}}{2}x^{-3/4} + x^{-1/4}\right)$
mais $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3^{3/4}}{2}x^{-3/4} + x^{-1/4} = +\infty$ donc pour que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe dans $\mathbb{R}$ il faut $b = 0$, donc f nulle sur $[0, +\infty[$

On peut faire le même type de raisonnement sur $\mathbb{R}_-$.

On a donc : $\boxed{\text{La fonction nulle est la seule solution du problème sur } \mathbb{R}.}$